ÜBER MENELAOS' SPHÄRIK.

INAUGURAL-DISSERTATION

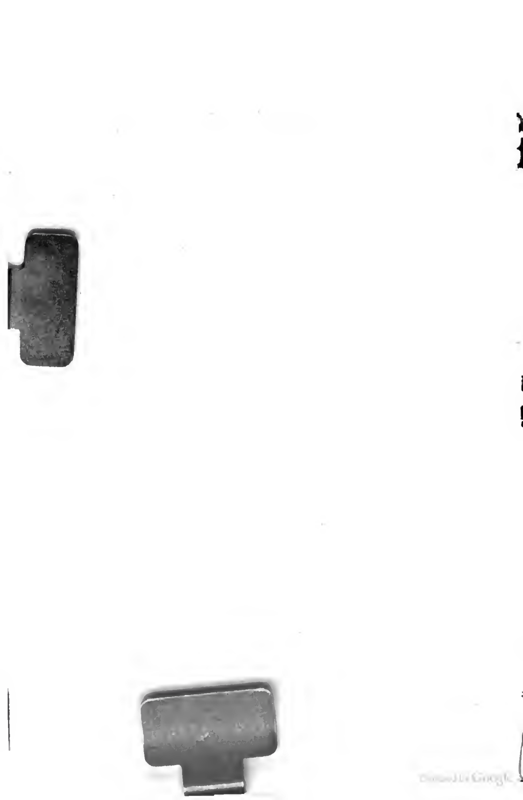
ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT, SEKTION II,
DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT VON

AXEL ANTHON BJÖRNBO.

MIT 25 FIGUREN IM TEXT.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1902.



I.

Die Berichte über Menelaos.

1. **Plutarch** (Zeitgenosse des Trajan) *„de facie in orbe lunae"* cap. 17 (Plutarchi *moralia*, ed. Bernardakis V, p. 429).

Hier läfst der Verfasser eine der Personen der in Dialogform gehaltenen Abhandlung sich mit folgenden Worten an einen anwesenden Menelaos, in dem er den Mathematiker erkennt, wenden: *„Ich schäme mich fast, lieber Menelaos, in deiner Gegenwart eine mathematische Thesis, die als Basis für die katoptrischen Untersuchungen gilt, hervorzuheben . . .".*

2. **Ptolemaios** (thätig ca. 125—151 n. Chr.), *Syntaxis* VII, cap. 3 (ed. Halma II, p. 25 u. 27).

Hier werden zwei Observationen mitgeteilt, die „der Geometer Menelaos" im ersten Regierungsjahr des Trajan in Rom gemacht hat.[1]

3. **Pappos** (3. Jahrh. n. Chr.) *συναγωγή* (*collectiones*):

a) IV, 36 (ed. Hultsch, p. 270): *„Von den Kurven, die Demetrios von Alexandria und Philon von Tyana untersuchten, und die manche merkwürdige Eigenschaften haben, ist eine von Menelaos besonders hervorgehoben und zwar die, die er 'παράδοξος' nannte."*[2]

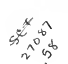
b) VI, 1 (ed. Hultsch, p. 476): Eine Figur, die von drei gröfsten Kreisbogen umschlossen ist, nennt Menelaos in der *Sphärik* „*τρίπλευρον*". — An derselben Stelle beweist Pappos vier Sätze über sphärische Dreiecke, die wir in Menelaos' *Sphärik* wiederfinden.

c) VI, 55 (ed. Hultsch, p. 602): Über die Untergänge der Tierkreiszeichen hat „Menelaos der Alexandriner" eine Abhandlung (*πραγματεία*) geschrieben.[3] — Diese Stelle gehört zum Kommentar zu Euklids *φαινόμενα*, wo ähnliche Probleme behandelt sind.

1) Dieser Bericht wird in der späteren astronomischen Litteratur immer wieder reproduziert, zuerst in Proklos' *ὑποτύπωσις*.

2) Vgl. Chasles, *Aperçue historique*, p. 23.

3) Die Übersetzung von Hultsch „*πραγματεία* = commentarium" ist nicht als Kommentar im modernen Sinn dieses Wortes zu verstehen.



4. **Theon von Alexandria** (ca. 365 n. Chr.) in den *Kommentaren zu Ptolemaios' Syntaxis*:

a) zu I, cap. 10 (ed. Halma, p. 110) sagt Theon bei der Erwähnung der Sehnentafel des Ptolemaios: *„Von Hipparch wurde nun auch eine Abhandlung in 12 Büchern über die Geraden im Kreise verfaſst, ferner auch von Menelaos eine in 6 Büchern."*

b) zu II, cap. 7 (ed. Halma, p. 266). Zur Bestätigung der Kongruenz zweier sphärischer Dreiecke fügt Theon hinzu: *„so wie es Menelaos in der Sphärik beweist"*.

c) zu VI, cap. 11 (Baselerausgabe, p. 342—43) sagt Theon: *„Die von Ptolemaios hier vorgeführte Theorie läſst sich besser erörtern, wenn erst zwei Theoreme der Sphärik bewiesen werden."* Danach referiert Theon zwei Kongruenzsätze sphärischer Dreiecke mit Beweis. Er schlieſst mit den Worten: *„Dies bewies also Menelaos im ersten Buche der Sphärik."*

5. **Proklos** (ca. 410—485 n. Chr.) im *Kommentar zum ersten Buche der Euklidischen Elemente* (ed. Friedlein, p. 345) bemerkt zu Euklid I, 25: *„Die Beweise dieses Satzes, die die anderen besorgt haben, wollen wir kurz berichten, und zwar zuerst den, welchen Menelaos der Alexandriner erfand und mitteilte."* Nun folgt der neue Beweis von Menelaos, danach ein anderer von Heron dem Mechaniker.

Weitere Berichte aus griechischen (oder römischen) Quellen habe ich nicht finden können.[1]) Aus den zitierten geht aber schon folgendes hervor:

Menelaos, aus Alexandria gebürtig, war in Rom zur Zeit des Regierungsantritts des Kaisers Trajan (25. Jan. 98 n. Chr.) *mit astronomischen Beobachtungen, und zwar mit solchen, die zunächst zum Gebrauch eines Fixsternkatalogs zuträglich waren, beschäftigt* (man schlieſst so wegen der Anwendung in Ptolemaios' *Syntaxis*). — *Menelaos' Zeitgenosse, der berühmte Schriftsteller Plutarch, kennt und schätzt einen Menelaos als tüchtigen Mathematiker.* — *Menelaos ist Verfasser einer Sphärik in mindestens zwei Büchern* (nach der arabischen Überlieferung wahrscheinlich drei). *In diesem Werk hat er dem sphärischen Dreieck den Namen τρίπλευρον gegeben, welcher Name später von den Griechen allgemein verwendet wurde* (vgl. unten Kap. 4, a u. c). *Im ersten Buche der Sphärik standen verschiedene Fälle von Kongruenz solcher Dreiecke.* — *Menelaos hat ferner wahrscheinlich eine Sehnenberechnung in 6 Büchern verfaſst, sowie eine Abhandlung über Unter-*

1) Theon von Smyrna (Zeitgenosse des Menelaos) erwähnt ihn nicht; Nikomachos auch nicht. Spätere Verfasser wie Jamblichos (in dessen leider verlorener *Sphärik* man zunächst Berichte über Menelaos hätte erwarten können), Porphyrios, Eutokios und Diophant auch nicht.

gänge der Zeichen des Tierkreises. Er hat einen neuen Beweis zu Euklid I, 25 irgendwo veröffentlicht und einer transcendenten Kurve, die er „die wunderbare" nannte, seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Es giebt andere Berichte über Menelaos, nämlich die von den Arabern herrührenden, die jedoch mit gewisser Vorsicht aufzunehmen sind.

Aufser den Mitteilungen über die *Sphärik* und den Text derselben, denen wir ein eigenes Kapitel widmen wollen, sind es die folgenden:

1. Nach mehreren arabischen *Encyklopädien*[1]) hat Menelaos ein mechanisches Werk verfafst, das ins Arabische übersetzt wurde. Über den Titel desselben gehen die Quellen auseinander.

So befindet sich nach Casiri[2]) im Escorial eine Handschrift (Cod. Escur. 905), wo (fol. 360) Menelaos gelobt wird. Es wird da gesagt: *„Seine Werke kamen erst in syrischer, dann in arabischer Übersetzung heraus. Er schrieb das Buch über sphärische Figuren und: 'liber de quantitate et distinctione corporum mixtorum'."*

Dagegen heifst ein im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung enthaltenes Werk: *„Menelai ad Timotheum Regem Liber de Statica, ubi de Corporum mistorum quantitate et pondere."*

Letzteren Titel nimmt Steinschneider als richtig an.[3]) Einen dritten hat Wenrich,[4]) nämlich: *„De cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum."* Dieser Titel ist nach Suters Ansicht der richtige, weil El-Chazini (ca. 1100) in einer Abhandlung über die spezifischen Gewichte einfacher und zusammengesetzter Körper Archimedes und Menelaos als Gelehrte nennt, die sich mit dieser Frage beschäftigt haben.[5])

2. In *Kitab-el-Fihrist* wird Menelaos als Verfasser zu *„Elemente der Geometrie"*, redigiert von Tâbit ibn Korrah in 3 Traktaten, genannt.[3])

1) Es sind dies: *Kitab-al-Fihrist* von Abul Farag Muh. b. Ishaq (el Nadim); *Tarich el hokama* von Ibn el Kifti und *Lexicon bibliogr. et encycl.* von Haji-Khalfa, ed. Flügel, Leipzig 1835—58. — Das Mathematikerverzeichnis im *Fihrist* ist von H. Suter ediert, Zeitschr. f. Math. u. Physik **37**, Supplement.

2) Casiri, *Bibl. Arabico-Hispan. Escurialensis* I—II, Codices Math. I, p. 339 ff.

3) Steinschneider, *Arab. Übers.* § 112.

4) Wenrich, de auct. Graec. verss. Syriac. Arab. p. 211.

5) Suter, l. c. p. 226. In Suters Übersetzung von *Fihrist* heifst der Titel: *„Über die Kenntnisse der Gröfse und Einteilung der verschiedenen Körper, verfafst im Auftrag des Kaisers Domitian".* Dafs mit Körper nicht Himmelskörper gemeint sind, wie Suter damals vermutete, ist später klar gelegt worden. Über den Namen „Domitian" thut man nach Steinschneider am besten zweifeln.

3. Dieselbe Bibliographie schreibt dem Menelaos ein *„Buch der Dreiecke“* zu, von welchem nur ein kleiner Teil ins Arabische übersetzt worden ist.

Man mufs also annehmen, dafs ein bisher ganz unbekanntes mechanisches Werk von Menelaos, und zwar ein *hydrostatisches* im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung vorliegt. Es scheint uns dies nicht mit den übrigen Leistungen unseres Verfassers zu stimmen. Die griechischen Astronomen schrieben jedoch oft mechanische Werke, Hipparch z. B. *„περὶ τῶν διὰ βάρους κάτω φερομένων.“*[1])

Über den Titel: *„Elemente der Geometrie“* schreibt Steinschneider: *„Dieses sonst unbekannte, verdächtige Buch ist von Kifti weggelassen, und Chwolson erwähnt es in seinem Verzeichnisse von Thabits Schriften gar nicht.“* — Es würde aber mit der oben zitierten bisher unbeachteten Notiz von Proklos durchaus passen, dafs Menelaos ein solches Werk verfafst hat.[2])

Ob Menelaos vielleicht in diesem Buch oder in einem *„Buch der Dreiecke“* Reihen von Dreiecksätzen in der Ebene, die wir in Euklid nicht finden, den von ihm auf der Kugel bewiesenen analog, wie z. B. die vollständige Kongruenztheorie, gesammelt hat, lassen wir dahingestellt.

4. Im *„liber trium fratrum“* (ed. Curtze, p. 150)[3]) wird dem Menelaos *„in seiner Geometrie“* eine Würfelverdoppelung zugeschrieben, und zwar dieselbe, die man nach Eutokios allgemein dem Archytas von Tarent beilegt.

Der Erfinder dieser Würfelverdoppelung war jedenfalls Archytas; denn Eutokios[4]) sagt ausdrücklich: *„Ἡ Ἀρχύτου εὕρησις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ“*, und Eudemos, unsere beste Quelle, was die griechische Mathematik betrifft, lebte ca. 400 Jahre vor Menelaos.

Ob Archytas' Beweis vielleicht später in demselben Werke, in welchem Menelaos (nach Pappos' Bericht) die paradoxale Kurve behandelte, aufgenommen wurde, müssen wir dahinstellen. Archytas' Verfahren besteht in der Bestimmung des Schnittpunktes einer Kegelfläche mit einer cylindrischen Raumkurve (der sogen. Tore). Die paradoxale Kurve des Menelaos ist nach einer Hypothese von Tannery[5]) dieselbe wie die Kurve des

1) Simplikios, *de coelo* I, p. 61 B.

2) Nachträglich erfahre ich, dafs Gino Loria in seinem Buch: *Le scienze esatte nell' antica Grecia* III, p. 60 den Bericht des Proklos zitiert.

3) *„Liber trium fratrum“* rührt von Muhammed, Ahmed und Alhasan, Söhnen des Mûsá ibn Schâkir, die in der ersten Hälfte des 9. Jahrh. lebten, her. Curtzes Ausgabe befindet sich in Nova acta der ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher **49**, Halle 1885.

4) Archimedis *opera omnia*, ed. Heiberg III, p. 98 ff.

5) Vgl. Tannery, *Notes pour l'histoire des courbes et des surfaces dans l'antiquité,* Bullet. des sciences math. et astr. Tome VII—VIII.

Viviani, d. h. die Kurve von doppelter Krümmung, die durch Schnitt einer Cylinderfläche mit einer Kugel entsteht. Angenommen, dafs Tannerys Hypothese richtig ist, so würden wir uns allerdings leicht vorstellen können, dafs Menelaos den Beweis des Archytas reproduziert hat.[1])

Auch über die astronomische Thätigkeit des Menelaos finden wir Aufschlüsse bei den Arabern. Die in Frage kommenden Nachrichten habe ich anderswo (Bibl. math. 1901, p. 196ff.) zusammengestellt. Die Resultate dieser Untersuchung werde ich hier kurz wiederholen:

1. Al-Battani († ca. 928) stützt seine Bestimmung der Präcession der Nachtgleichen (vgl. Albategnius, *De numeris et motu stellarum fixarum, transl. a Platone Tiburtino, Bononiae 1645, p. 201—202*) auf drei Observationen, die er dem Menelaos zuschreibt. Die eine dieser Observationen hat er der *Syntaxis* entnommen, wie er auch selbst sagt.

Für die zwei anderen scheint er sich auf ein Werk von Menelaos selbst zu stützen. Wenigstens geht es aus den Zahlenwerten dieser zwei Längenbestimmungen hervor, dafs dieselben kaum mit Hilfe der *Syntaxis* des Ptolemaios von Al-Battani unterschoben sein können. Dann werden wir aber gezwungen anzunehmen, dafs Al-Battani in der That authentische von der *Syntaxis* unabhängige Berichte über Fixsternbestimmnngen des Menelaos besafs.

Es scheint zunächst, dafs Ptolemaios und Al-Battani aus den ihnen zur Verfügung stehenden Menelaischen Bestimmungen nur einzelne für ihre Präcessionsberechnung besonders geeignete herausgegriffen haben. Die vier überlieferten Bestimmungen (Sirius, Regulus, Spica und β Scorpii) lassen uns auch annehmen, dafs Menelaos' Fixsternbestimmungen eine beträchtliche Anzahl ausgemacht haben. Dagegen scheinen sie nicht besonders gut gewesen zu sein, indem die Längen im allgemeinen ca. 1^0 zu klein geworden sind. Die Ursache ist wahrscheinlich ein Irrtum in Bezug auf den Unterschied des siderischen und des tropischen Jahres.

Die fehlerhafte Präcessionsberechnung in Ptolemaios' *Syntaxis* ist wahrscheinlich eine Folge dieses Irrtums, die auch die Präcession des Al-Battani beeinflufst haben dürfte, obwohl natürlich in minderem Umfang.

Bemerkenswert ist, dafs Al-Battani offenbar viel mehr Vertrauen zu Menelaos' Bestimmungen hatte als zu denen des Ptolemaios. Da die

---

1) Nach Curtze, l. c. p. 158 wird im *liber trium fratrum* auch die Archimedische Berechnung der Kugel-Oberfläche und -Volumen der *„Geometrie“* des Menelaos zugeschrieben. Dies beruht aber lediglich auf einer unrichtigen Textkorrektur; vgl. meinen Aufsatz in Bibl. math. 1902, *Über zwei math. Hss. aus dem 14. Jahrh.*

von Ptolemaios angenommene Präcession nach Al-Battani falsch war, und man nach dem Inhalt von Ptolemaios' 7. Buch annehmen mufste, dafs sein Fixsternverzeichnis nicht ein Ergebnis eigener Beobachtungen, sondern eine Kompilation aus den Arbeiten seiner Vorgänger war, so war es notwendig, einen dieser Vorgänger als den eigentlichen Beobachter zu betrachten, und dementsprechend die Längen im Ptolemaios zu korrigieren. Al-Battanis Bericht zeigt uns, dafs man damals den Menelaos als diesen wahren Beobachter betrachtete. Noch bestimmter entschied sich ein Nachfolger des Al-Battani für Menelaos, nämlich:

2. Abul-Hosein Abdalrahman Al-Sûfi († 986). Er berichtet in seiner *„Abhandlung über die Fixsterne mit Figuren“* (ediert von Schjellerup St. Petersburg 1874, p. 42), dafs Ptolemaios sein Fixsternverzeichnis durch Addition von 25 Minuten zu den Längenbestimmungen des Menelaos herstellte, und zwar bei allen in seinem Katalog aufgenommenen Sternen. Es stimmt dies allerdings mit den Angaben in der *Syntaxis* in Bezug auf die zwei in diesem Werke referierten Beobachtungen des Menelaos. Es stimmt aber keineswegs für die zwei von Al-Battani dem Menelaos zugeschriebenen Längenbestimmungen, von denen die eine um 40′, die andere um 20′ von den Längen in Ptolemaios' Katalog abweicht.

Durch die Behauptung aber, dafs Menelaos ein grofses Fixsternverzeichnis verfafst hat, erreicht Al-Sûfi, den Katalog des Ptolemaios als einen für eine bestimmte Zeit gültigen verwenden zu können. Dementsprechend hat er auch mit Hülfe der Präcession des Al-Battani die Längen im Ptolemaios, nachdem er dieselben zuerst auf die Zeit des Menelaos zurückgeführt hat, zur Herstellung seines eigenen Fixsternkatalogs benützen können.

Aus diesen Gründen können wir dem Bericht des Al-Sûfi keinen Glauben schenken, sondern müssen ihn als eine aufgebauschte Interpretation betrachten, die Al-Sûfi brauchte, um sein eigenes Verfahren nicht in Mifskredit zu bringen.

Al-Sûfis Werk wurde um das Jahr 1256 ins Kastilianische unter dem Titel *„Abolfazen* (oder *Albohazen*): *Libro de las estrellas“* übersetzt, und der Bericht über Menelaos' grofses Fixsternverzeichnis wurde bis auf Copernicus und Tycho Brahe als authentisch betrachtet (vgl. die oben erwähnte Abhandlung in Bibl. Math. 1901, p. 196 ff.).

3. Haji-Khalfa (ed. Flügel III, p. 471) notiert in seinem Werkverzeichnis: *„observationes astronomicae a Menelao anno 854* (d. h. 107 n. Chr.) *factae.“*

Die vorhergehende Zusammenstellung der uns überlieferten Berichte über Menelaos zeigt, dafs seine Verfasserwirksamkeit wenigstens folgendes umfafst:

1. **Sphärik** (3 Bücher).
2. **Über die Geraden im Kreise** (6 Bücher).
3. **Hydrostatik.**
4. **Abhandlung über die Untergänge der Tierkreiszeichen.**
5. **Elemente der Geometrie** (3 Bücher?).

---

6. Irgend eine Publikation **über transcendente Kurven.**
7. Eine Reihe von **Fixsternbestimmungen.**
8. **Buch der Dreiecke?**

II.

Die Überlieferung der Sphärik.

Der griechische Text der *Sphärik* ist wie gesagt verloren, und unsere Kenntnisse derselben verdanken wir also lediglich den arabischen oder den nach denselben gemachten hebräischen und lateinischen Übersetzungen. Weil aber die Araber nach ihrer Gewohnheit das von ihnen hoch geschätzte Werk immer neu revidierten, ist die Überlieferungsgeschichte eine ziemlich verwickelte geworden.

Zu meinen Untersuchungen stand mir zuerst nur die Druckausgabe von Halley zur Verfügung.[1]) Ich fühlte aber bald, dafs ich nach einer ganz unsicheren Grundlage arbeitete. In einem Beweis wurde nach dieser Ausgabe die Sinusversus-, in Corollaren die Tangensfunktion gebraucht. Die Griechen hatten aber, wie bekannt, keine Kenntnis dieser Funktionen. Überhaupt kam mir vieles in den Beweismethoden ungriechisch vor. Aufserdem war es mir überhaupt unmöglich, Halleys Zusätze von dem Text der *Sphärik* zu unterscheiden.

Es gelang mir dann, die Maurolycusausgabe[2]) zur Hand zu bekommen. Dieselbe war jedoch ganz unanwendbar. In der Vorrede sagt der Herausgeber selbst, dafs er *„nicht möglichst viele, sondern passende"* Theoreme von ihm selbst hinzufügen würde. Die letzte Hälfte des dritten Buches

---

1) Menelai *Sphaericorum libri III,* quos olim, collatis MSS. Hebraeis et Arabicis Typis exprimendos curavit Vir. Cl. Ed. Halleius; Praefationem addidit G. Costard, Oxonii 1758.

2) Theodosii *Sphaericorum elementorum libri III* ex trad. Maurolyci Messanensis Mathemathici; Menelai *Sphaericorum libri III* ex trad. eiusdem; Maurolyci *Sphaericorum libri II* etc. Messanae 1558.

hat er nicht mitgenommen, weil er sie für eine genauere Erörterung in seiner eigenen *Sphärik* zurückhalten wollte.

Es wurde mir klar, dafs ich zu den Handschriften Zuflucht nehmen mufste, und zwar zu den lateinischen, weil ich die arabischen so wenig wie die hebräischen lesen konnte.

Nun steht im Verzeichnisse[1]) über die von Gerhard von Cremona am Schlufs des 12. Jahrhunderts zu Toledo erledigten Übersetzungen aus dem Arabischen:

„liber Milei tractatus III.“

„Mileus“ ist aber nur eine durch Mifsverständnis des Arabischen hervorgerufene Verdrehung von „Menelaos“.

Diese älteste lateinische Übersetzung vermutet Steinschneider[2]) in dem oben erwähnten Pariser Codex Nr. 9335 zu finden; denn da befindet sich ein *„liber Mileij de figuris spericis“* in 3 Traktaten (Büchern). Einzelne andere lateinische Menelaoscodices sind ihm und anderen bekannt, jedoch nur dem Namen nach.

Nach den Katalogen und Handschriftenverzeichnissen nahm ich mir vor, das vorliegende Material genauer zu konstatieren, und es gelang mir, die Existenz von 17 bis 18 lateinischen Handschriften festzustellen, die nach den Titeln alle Menelaos' *Sphärik* enthalten. Von 9 dieser Handschriften kann ich konstatieren, dafs sie alle Abschriften derselben mittelalterlichen lateinischen Übersetzung sind, indem ich 5 selbst kollationiert habe, während mir mein früherer Kollega cand. Raphael Meyer über die 4 anderen, die alle in Rom liegen, wertvolle Aufschlüsse gegeben hat. Die 5 von mir kollationierten sind:

1. Cod. Parisinus Arsenalis 1035, 15. Jahrh.[3])
2. Cod. Parisinus 9335 (Bibl. nationale), 14. Jahrh.[4])
3. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 90, 14. Jahrh.
4. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 63, 15. Jahrh.[5])
5. Cod. Vindobonensis 5277, ca. 1525.[6])

1) Vgl. Boncompagni, *della vita e delle opere di Gherardo Cremonese*, Roma 1851; Wüstenfeld, *Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische*, Abh. d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **22**, u. a.

2) Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 483 ff.

3) *Catal. des manuscrits de la bibl. de l'Arsénal*, par M. Martin II, p. 246, Paris 1886; vgl. Leclerc, l. c. II, p. 410 u. 492.

4) *Inventaire des manuscrits latins conservée à la bibl. nat. sous les numéros 8823—18613*, par L. Délisle, Paris 1863—71, p. 28; vgl. oben Steinschneider und Leclerc. Eine Beschreibung ds. Hs. gebe ich in Bibl. math. 1902.

5) *Bibl. manuscripta ad S. Marc. Venetiarum* digessit J. Valentinelli, Venetiis 1871, Codd. mss. lat. IV, p. 218, 249 u. 266; vgl. unten Note 168.

6) *Tabulae codd. mss. praeter Graecos et orientales in Bibl. Palatina-Vindob.*

Die vier Handschriften, die nach den Aufschlüssen von Hrn. Meyer denselben Text enthalten, sind:

6. Cod. Vaticanus 4571 e Fondo Vaticano.
7. Cod. Vaticanus 1351 e Fondo Palatino.
8. Cod. Vaticanus 1261 e Fondo Reginae Sueciae.
9. Cod. Vaticanus 1268 e Fondo Reginae Sueciae.

Diese älteste lateinische Gerhardsche Mileusübersetzung habe ich nun mit den Druckausgaben verglichen, und zwar mit dem Resultate, daſs der Text, den Halley zu seiner Druckausgabe gebraucht hat, von derselben arabischen Redaktion stammt, während dagegen der mit Zusätzen übersäeten Maurolycusausgabe eine andere arabische Redaktion zu Grunde lag.

Zur Basis meiner Untersuchungen habe ich nun hauptsächlich die Gerhardsche Übersetzung gebraucht, oder, was dasselbe ist, die Halleyausgabe nach dieser Übersetzung korrigiert.

Ich bin doch in der glücklichen Lage, Stellen, namentlich im dritten Buche, die ein besonderes Interesse haben, mit anderen Redaktionen vergleichen zu können, indem ich von Hrn. Dr. R. Besthorn verschiedene wichtige Aufschlüsse über zwei arabische Leidenercodices (399 u. 930) bekommen habe. Überall, wo ich diese Codices erwähne, geschieht es also nur durch das freundliche Entgegenkommen Dr. Besthorns.

Durch seine Aufschlüsse wird es bestätigt, daſs die verschiedenen Menelaosrezensionen wenigstens stellenweise ziemlich viel von einander abweichen. Der sogenannte „Satz des Menelaos“ ist z. B. im Cod. Leid. 930 und in der Redaktion, die Gerhard und Halley verwendeten, ganz verschieden redigiert.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen über Menelaos und seine Sphärik werden wir uns zu dem 3. Buche derselben wenden, welches Buch wegen seines trigonometrischen Inhalts von besonderer Wichtigkeit ist, während wir die zwei anderen Bücher bei Seite lassen.

III.

Menelaos' drittes Buch und die sphärische Trigonometrie.

a. Überblick über unsere Kenntnisse der griechischen Trigonometrie.

Bevor wir zur Behandlung von Menelaos' drittem Buch übergehen, wollen wir einige Bemerkungen vorausschicken über die Kenntnis der Trigonometrie der Griechen, die man ohne Rücksicht auf Menelaos' *Sphärik* erworben hat.

Die genauesten Untersuchungen über die Trigonometrie der Alten stammen von Delambre und v. Braunmühl.[1] Delambres Darstellung ist jedoch mit Vorsicht zu benutzen, weil er die alten und die modernen Methoden so in einander mengt, dafs man schwer herausbringt, was ihm selbst und was den Alten gehört.

Sonst hat man sich meistens mit den Kenntnissen, die sich Ptolemaios' *Syntaxis* entnehmen lassen, zufrieden gestellt; mit Recht hebt aber Tannery[2] hervor, dafs man mit Ptolemaios als einziger Quelle ein sehr unsicheres Bild von der alten Trigonometrie bekommt, und v. Braunmühl[3], dafs wir an Menelaos' drittem Buch eine Quelle besitzen, die bisher nicht in der wünschenswerten Weise gewürdigt wurde.

Ein kühnes Bild der Erfindung und stufenweisen Entwickelung der Trigonometrie ist von Tannery[4] entworfen. Leider hat er doch Menelaos' drittes Buch ganz aufser Acht gelassen. Es ist dies um so mehr zu bedauern, weil er, mit seiner beneidenswerten Fähigkeit, die geschichtlichen Vorgänge auch da zu ahnen, wo die Urkunden fehlen, durch eine genaue Untersuchung von Menelaos' *Sphärik* mit so gutem Material wäre versehen worden, dafs er sicher, die Entwickelungsgeschichte der Trigonometrie vor Menelaos ganz klar zu legen, vermocht hätte.

Da wir in der folgenden Untersuchung öfters auf Ptolemaios' *Syntaxis* hinweisen müssen, werden wir gleich die trigonometrischen Grundformeln, die sich in diesem Werke finden, anführen.

1) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* 1—2; v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I.

2) Tannery, *l'astronomie ancienne,* p. 305.

3) v. Braunmühl, l. c. I, p. 15. 4) Tannery, l. c. p. 67—68.

Zur Berechnung der Sehnentafel dienen folgende Sätze aus der Trigonometrie der Ebene, die wir in die uns geläufige Formelsprache übertragen haben[1]):

1. $\text{crd.}\, x = \text{crd.}\,(360^0 \div x)$ entspricht unserer Formel $\sin a = \sin(\pi \div a)$
2. $\text{crd.}^2\, x + \text{crd.}^2\,(180^0 \div x) = 4r^2$ entspricht unserer Formel $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.
3. der sogenannte Satz des Ptolemaios:

   $$\text{crd.}\, a \cdot \text{crd.}\,(c \div b) = \text{crd.}\, c \cdot \text{crd.}\,(a \div b) + \text{crd.}\, b \cdot \text{crd.}\,(c \div a).$$

4. $\text{crd.}\, \frac{a}{2} = \sqrt{r\,[2r \div \text{crd.}\,(180^0 \div a)]}$, entspricht unserer Formel:

   $$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 \div \cos x}{2}}.$$

5. Wenn $a > b$, wird $\frac{\text{crd.}\, a}{\text{crd.}\, b} < \frac{a}{b}$.

Einzelne andere Beispiele der Methoden zur Auflösung ebener Dreiecke geben uns Tannery (l. c. p. 305) und v. Braunmühl (l. c. p. 23 und 27), und zwar immer nach der *Syntaxis*.

Mit Hülfe von Menelaos' Satz (*Sphärik* III, 1) wird im Ptolemaios eine Reihe sphärisch-astronomischer Berechnungen erledigt. Darin finden wir *implicite* — denn es wird als trigonometrische Funktion ausschliefslich die Sehne des doppelten Bogens (ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν) verwendet, und $\sin 90^0$, d. h. $\frac{1}{2}$ crd. 180^0 wird nicht als Einheit genommen, sondern gleich r oder 60^{partes} gesetzt — folgende sphärisch-trigonometrische Formeln, die sich alle auf das bei A rechtwinklige Dreieck ABC beziehen[2]):

(I) $\qquad \sin c = \sin a \ \sin C$

(II) $\qquad \text{tg}\, c = \sin b \ \text{tg}\, C$

(III) $\qquad \cos a = \cos c \ \cos b$

(IV) $\qquad \text{tg}\, b = \text{tg}\, a \ \cos C$.

Es fehlen die wahrscheinlich erst bei den Arabern entdeckten Grundformeln:

(V) $\qquad \cos C = \cos c \cdot \sin B$

(VI) $\qquad \cos a = \cot C \cdot \cot B$.

Auch in anderen Werken von Ptolemaios bekommen wir Aufschlüsse über die griechischen Berechnungsmethoden.

1) Vgl. Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 19—22.

2) Vgl. wieder Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 24—25.

In einer sehr genauen Untersuchung hat Delambre[1]) nachgewiesen, dafs dieselben sphärisch-astronomischen Probleme, die in der *Syntaxis* gelöst wurden, in einem nur in lateinischer Übersetzung überlieferten Werke mit dem Titel *„Planisphärium“* erledigt sind. Die darin angewandten Methoden beruhen auf der nach Delambre schon Hipparch genau bekannten *stereographischen Projektion.*[2]) Leider sind wir genötigt, die Planisphären aus unseren Untersuchungen auszuschliefsen.

Auch Delambre[3]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dafs in Ptolemaios' Schrift περὶ ἀναλήμματος[4]) eine Methode zur Verfertigung von Sonnenuhren vorkommt, die einer trigonometrischen gleichkommt.

Diese Methode besteht in der Orthogonalprojektion der Kugel auf drei zu einander senkrechte Ebenen, den Meridian, den Horizont und den Vertikalkreis. v. Braunmühl[5]) hat sie als eine rein graphische Methode auffassen wollen. Wir geben gern zu, dafs dieselbe anfangs rein graphisch gewesen ist, müssen aber Zeuthen[6]) darin Recht geben, dafs sie sich in Ptolemaios' Werk in eine *trigonometrische* entwickelt hat. Es werden nämlich die zu bestimmenden Gröfsen, sobald nur die Mittel zu ihrer Berechnung da sind, bereits als δεδομένα (gegebene) bezeichnet, womit auf die Möglichkeit einer Berechnung mit Hülfe der Sehnentafel hingewiesen wird. Unten werden wir nach Zeuthen ein Beispiel von der Auflösung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks angeben, das auf diese Weise erledigt ist.

Vorerst müssen wir aber einige Bemerkungen einschalten:

Wie Zeuthen meinen wir, dafs es unberechtigt ist, in Hipparchs Worten: „διὰ τῶν γραμμῶν“[7]) eine Anspielung auf eine rein graphische Methode erblicken zu wollen. Wenn aber Zeuthen in der Bestimmung des Tagebogens eines Fixsterns im *Analemma* (ed. Heiberg p. 18)[8])

---

1) Delambre, l. c. II, p. 433—457.

2) Tannery, l. c. p. 50—55, meint, dafs die Erfindung der stereographischen Projektion bis auf Apollonios zurückgeht, dafs aber die damit verbundene *trigonometrische* Methode dem Ptolemaios gehört.

3) Delambre, l. c. II, p. 458—503.

4) Ediert von F. Commandinus (lateinisch) 1562. Die lateinische Übersetzung hat Heiberg mit einem griechischen Mailänder-Palimpsest verglichen, Zeitschr. f. Math. u. Physik **40**, Supplement, p. 1—30.

5) v. Braunmühl, l. c. p. 10—13.

6) Zeuthen, *Note sur la trigonométrie de l'antiquité,* Bibl. math. 1900, p. 20—27.

7) Hipparchi *Commentaria,* ed. Manitius, p. 150, 4.

8) Diese Bestimmung des Tagebogens (2α) durch die Deklination (δ) und die Polhöhe (φ) kommt der durch die Formel $\cos \alpha = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$ gleich; vgl. Zeuthen, l. c. p. 26.

genau die Methode, auf die Hipparch in seinem *Kommentar* hinweist, zu finden glaubt, so schiefst er mit dieser Schlufsfolgerung doch über das Ziel hinaus.

Was die verhängnisvollen Worte: „*διὰ τῶν γραμμῶν*" betrifft, so dürften sie eine noch allgemeinere Bedeutung haben, als sowohl v. Braunmühl als Zeuthen annimmt. Sie beziehen sich nämlich auf *jede geometrische Methode* oder *Darstellung durch Figuren* im Gegensatz zu anderen Methoden, wie z. B. instrumentalen oder rein rechnerischen. Als Beleg kann folgendes dienen: Während diese oder gleichbedeutende Worte in Ptolemaios' *Syntaxis* (ed. Heiberg I, p. 31, 5 und 32, 1) und in Theons *Kommentar* (Baseler-ausgabe p. 39, 15 und 22) offenbar auf die geometrischen Hülfssätze zur Berechnung der Sehnentafel gehen, so beziehen sie sich in Ptolemaios' *Analemma* (p. 15) auf die geometrische Orthogonalprojektion im Gegensatz zu einer rein instrumentalen Methode.

In Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 9 (ed. Heiberg I, p. 142, 6)[1]) und VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104, 19)[2]) und VIII, cap. 6 (ed. Halma II, p. 108, 6 und 110, 15) gehen aber dieselben Worte *διὰ τῶν γραμμῶν* oder *γραμμικῶν δείξεων* auf die *σφαιρικαὶ δείξεις*, d. h. auf die Anwendungen von Menelaos' Satz zur Lösung sphärisch-astronomischer Probleme durch Figurenbetrachtung und Berechnung. Nun gehen aber die beiden ersteren aus der *Syntaxis* hier zitierten Stellen auf den Inhalt der Kapitel „*περὶ τῶν τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ συναναφορῶν*" und „*περὶ συνανατολῶν* etc. ... *τῶν ἀπλανῶν*", d. h. eben auf die Kapitel, die denselben Titel haben wie auch die zwei verlorenen Abhandlungen des Hipparch, auf die er selbst und Pappos hinweisen.[3])

An den betreffenden Stellen in der *Syntaxis* findet sich nun eben die Relation[4]) zwischen den Gröfsen α, φ und δ, und sie wird *direkt* auf-

---

1) Diese Stelle lautet: „*Ὅτι δὲ τῶν ἀναφορικῶν χρόνων τὸν προκείμενον τρόπον ἡμῖν ἐκτεθειμένων εὔληπτα τὰ λοιπὰ πάντα γενήσεται τῶν εἰς τοῦτο τὸ μέρος συντεινόντων, καὶ οὔτε γραμμικῶν δείξεων πρὸς ἕκαστα αὐτῶν δεησόμεθα οὔτε κανονογραφίας περισσῆς, δι' αὐτῶν τῶν ὑποταχθησομένων ἐφόδων φανερὸν ἔσται.*" Die Worte, mit denen II, cap. 9 anfängt, beziehen sich auf II, cap. 7—8.

2) Diese Stelle lautet: „*Τούτων δ' οὕτως ἐχόντων, οἱ μὲν τῶν ἀληθινῶν καὶ πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου θεωρουμένων συνανατολῶν τε καὶ συμμεσουρανήσεων καὶ συγκαταδύσεων χρόνοι αὐτόθεν διὰ μόνων τῶν γραμμῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν ἀστερισμὸν αὐτῶν θέσεως ἡμῖν δύνανται λαμβάνεσθαι, διὰ τὸ καὶ τὰ σημεῖα τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων, οἷς ἕκαστος τῶν ἀπλανῶν συμμεσουρανεῖ τε καὶ συνανατέλλει καὶ συγκαταδύνει, δείκνυσθαι γραμμικῶς διὰ τῶν ὑποκειμένων θεωρημάτων.*"

3) Vgl. Pappos, p. 598—602 und Hipparch, p. 128, 5; 148, 20; 150, 14; 184, 2.

4) Diese Relation heifst in der *Syntaxis* II, cap. 8 und 7:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(90^0 \div \varphi)} = \frac{\sin(90^0 \div \delta)}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin(\alpha \div 90^0)}{\sin 90^0},$$

gestellt durch Menelaos' Satz, während die gleiche Relation sich im *Analemma* nur *implicite* findet.

Wir dürfen deswegen annehmen, dafs Hipparchs Worte διὰ τῶν γραμμῶν denselben Sinn haben wie in der *Syntaxis*. Somit bedeuten sie ganz einfach, dafs Hipparch in seiner Abhandlung περὶ συνανατολῶν durch Figuren auf der Oberfläche der Kugel (σφαιρικαὶ δείξεις) näher erörtert, was er im *Kommentar* lediglich an Beispielen ohne geometrische Nachweise zeigt. Eine indirekte Bestätigung dieser Annahme finden wir darin, dafs Menelaos' Satz schon *vor* Menelaos bekannt war, und dafs alle die Probleme, für die in Hipparchs *Kommentar* die Beweise fehlen, in der That in den zwei erwähnten Kapiteln der *Syntaxis* (II, 7 und VIII, 5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und der Sehnentafel gelöst werden.

Wir glauben somit, dafs Hipparch in seiner Abhandlung περὶ τῆς τῶν ιβ' ζῳδίων ἀναφορᾶς ganz wie Ptolemaios in der *Syntaxis* II, cap. 7—8 sich ein Κανόνιον τῶν ἀναφορῶν (d. h. eine Rektascensions- und Obliquascensionstafel) berechnet hat. Ferner hat er dann in seinem Werke περὶ τῶν συνανατολῶν durch Anwendung von Menelaos' Satz, d. h. διὰ τῶν γραμμῶν und mit Hülfe der Sehnentafel und der Obliquascensionstafel die Beweise und die Berechnungen, deren Resultate er im *Kommentar* angiebt, genau erörtert. Eine kurze Übersicht der von Hipparch in dieser Erörterung benutzten σφαιρικαὶ δείξεις giebt Ptolemaios dann in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 im Anschlufs an seinen Fixsternkatalog.

Damit wollen wir keineswegs behaupten, dafs die Analemmakonstruktionen neueren Datums sind als die σφαιρικαὶ δείξεις; nur stehen erstere nicht in direkter Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie, sondern bestanden vielleicht lange vorher als eine mehr primitive, rein graphische Methode. Später, da die Sehnentafeln vorhanden waren, führte man bei den Sonnenuhrkonstruktionen die durch die Tafeln bestimmbaren Gröfsen auf diese zurück, indem man sie als „gegebene" bezeichnete. Dafür spricht sowohl die ganze Abfassung und Form des *Analemmas* als auch der Umstand, dafs die σφαιρικαὶ δείξεις im Gegensatz zu den Analemmakonstruk-

---

d. h. $\sin(\alpha \dotplus 90^0) = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\delta$ (vgl. Note 8, vorhergehende Seite), wo α und δ sich auf einen Punkt der Ekliptik beziehen. In der *Syntaxis* VIII, cap. 5 wird genau dieselbe Relation gefunden, nur beziehen sich α und δ diesmal auf einen Fixstern, und die Relation dient dazu, „die Punkte des Äquators und der Ekliptik, die gleichzeitig mit den Fixsternen auf- und untergehen, mit Hülfe der gleichzeitig kulminierenden Punkte zu finden", vgl. *Syntaxis*, ed. Halma, II, p. 106, 14—18. Es ist aber dies eine Aufgabe, die Hipparch lösen mufste, um die Zahlenwerte in seinem Kommentar ausfindig zu machen, wenn er überhaupt trigonometrische und nicht rein instrumentale Methoden benutzte.

tionen direkt auf Berechnung abzielen und auch von Ptolemaios der Sehnentafel direkt beigefügt werden.

Die Berechnungen, die Zeuthen im *Analemma* gefunden und nachgewiesen hat, kommen folgenden modernen Formeln gleich:

A. für das rechtwinklige sphärische Dreieck den obigen aus der *Syntaxis* herausgezogenen I, II und IV (vgl. oben Seite 13).

B. für das schiefwinklige Dreieck den zwei Formeln:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin A}{\cos b \sin c \div \sin b \cos c \cos A},$$

die sich beide auf das Dreieck „Südpol — Nadir — Sonne (auf der südlichen Halbkugel über den Horizont gelegt)“ beziehen, d. h. auf ein Dreieck mit den Seiten $90^0 \div \delta$, $90^0 + h$ und $90^0 \div \varphi$, wo die den zwei erstgenannten Seiten gegenüber liegenden Winkel ω und $180^0 \div t$ berechnet werden (δ = die Deklination der Sonne, h = die Sonnenhöhe, φ = die Polhöhe, ω = das Azimuth der Sonne, t = der Stundenwinkel derselben).

Bemerkenswert ist, dafs Ptolemaios in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104—5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und einer geschickten Anwendung der Deklinationstafel eine ganz ähnliche Auflösung eines schiefwinkligen Dreiecks erreicht hat. Er findet nämlich hier die Deklination und Rektascension eines durch Breite und Länge gegebenen Sterns, d. h. er löst das Dreieck Stern — Weltpol — Pol der Ekliptik. Es mufs aber immer scharf betont werden, dafs bei diesen Auflösungen schiefwinkliger Dreiecke weder im *Analemma* noch in der *Syntaxis* von einer Kenntnis der betreffenden allgemeinen Formeln die Rede sein kann.

Die Berechnungen von ebenen Dreiecken, die wir in Ptolemaios' *Syntaxis* finden, hat uns v. Braunmühl (l. c. p. 26—27) dargelegt. Wir gehen nicht näher auf diese ein, weil wir sie im folgenden nicht gebrauchen.

Eine andere damit in Verbindung stehende Frage werden wir dagegen kurz erörtern, und zwar die, ob die Griechen, wie Tannery[1]) vermutet jemals die Sinusfunktion statt der doppelten Sehne eingeführt haben.

Wenn wir Tannerys Hypothese nicht beistimmen können, so geschieht es nicht etwa, weil wir keine Spuren von einer Sinusfunktion, weder bei Ptolemaios noch bei Menelaos, gefunden haben, sondern vielmehr weil wir keinen Grund sehen, diese Hypothese aufzustellen; denn:

1) Tannery, *l'astr. anc.* p. 63—67.

1. solange die Cosinus- und Tangensfunktionen doch nicht eingeführt waren, ist der Vorteil des Sinnsses statt der Sehne praktisch sehr gering;

2. finden wir die Annahme, dafs die Sehnentafeln die Sinustafeln hätten verdrängen sollen, in jeder Beziehung sehr unwahrscheinlich, um so mehr, weil wir (vgl. unten Seite 47—49);

3. guten Grund hahen anzunehmen, dafs die Einführung der Sehne als trigonometrische Funktion in inniger Verhindung mit der Erfindung der Trigonometrie steht.

Es scheint uns deswegen viel natürlicher, anzunehmen, dafs ein anderes Volk als die Griechen, und zwar ein Volk, das mehr Sinn für praktische Rechnung hatte als diese und durch keine Tradition gehunden war, diese Neuerung gemacht hat. Dies trifft nun gerade in Bezug auf die Inder zu. Deswegen können jedoch die indischen Sinustafeln von griechischen Sehnentafeln ihren Ursprung hahen, ohwohl wir hezweifeln, dafs dies der Fall ist.

Noch eines ist hier zu hemerken: Die Weise, auf welche Ptolemaios die Sehnentafeln zur Auflösung ehener Dreiecke verwendet, zeigt einerseits, wie leicht die Nachteile, die die Sehnentafeln den Sinustafeln gegenüher aufweisen, sich umgehen lassen und in der That umgangen worden sind, macht es aher andererseits fast undenkhar, dafs die Sinusfunktion dem Ptolemaios hekannt gewesen sei.

Greifen wir aus den zahlreichen Beispielen die Auflösung von Dreieck BED mit dem rechten Winkel B und $\angle E = 51^0 30'$ (Ptolemaios, *Syntaxis* XIII, cap. 7, ed. Halma II, p. 419—420) heraus: $\angle BED$ mifst dann, sagt Ptolemaios, 103 von solchen Graden, von denen 360 Grad **2** Rechte betragen (*τοιούτων $\overline{ργ}$ οἵων αἱ δύο ὀρθαὶ $\overline{τξ}$*), folglich, fährt Ptolemaios fort, ist das Verhältnis der Katheten 94 : 75 von solchen Teilen, deren **120** auf die Hypotenuse gehen, d. h. Ptolemaios erreicht, wenn er immer die Winkel und gleichzeitig anch die Hypotenuse doppelt rechnet, die Sehnentafel ganz wie eine Sinustafel verwenden zu können; denn in der Sehnentafel entsprechen 103^0 und 77^0 hezw. 94^{pertas} und 75^{partes}.

Ursprünglich ist Ptolemaios zu diesem Verfahren gekommen durch Umschreihung des Dreiecks mit einem Kreis, in welchem die Hypotenuse dann Durchmesser wird. Das zeigt uns nämlich die erste Auflösung ebener Dreiecke in der *Syntaxis* (II, cap. 5, ed. Heiberg, I, p. 99—100); v. Braunmühls Darstellung (I, p. 26) ist somit ganz zutreffend. Später aber wird in der *Syntaxis* die Umschreihung nicht mehr erwähnt; alle Gröfsen werden gleich verdoppelt, das Nachschlagen in der Sehnentafel direkt erledigt, ja sogar ganze Rechnungen mit den doppelten Werten durchgeführt. Die Griechen, denen dieses Verfahren nun einmal geläufig war, fanden keinen Grund, Neuerungen einzuführen; die Inder dagegen, die an die Tradition nicht

gebunden waren, und denen diese Methode schwerfällig erscheinen mufste, hatten guten Grund, die scheinbar lediglich formelle Verbesserung zu machen. Dafs diese Verbesserung in ihren Konsequenzen sich als eine sehr wichtige erwies, indem sie die Einführung der Cosinus- und der Tangensfunktion mit sich führte, hätte man ja im voraus nicht wissen können.

b. Der Inhalt von Menelaos' drittem Buch.

III, 1. (sog. Menelaos' Satz):

Es liegen von diesem Satze mehrere Versionen vor, die, obwohl der Grundgedanke der Beweisführung immer derselbe bleibt, doch sehr verschieden sind. Sie teilen sich in zwei Hauptgruppen, nämlich:

1. Die Redaktion in der Maurolycusausgabe (Quelle unbekannt), die arabische Rezension von Abu-Nasr-Mansur (Cod. Leid. 930), Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13 (ed. Heiberg I, p. 74 ff., ed. Halma I, p. 54 ff.) und Theons *Kommentar* zu Ptolemaios (Baselerausgabe p. 66 ff.). Zwar weichen diese Redaktionen in Umfang und Text von einander ab; die Hauptfigur (wie deren Buchstaben) ist aber genau dieselbe.

2. Die Redaktion in Gerhards Übersetzung und in der Halleyausgabe (d. h. in Jacob ben Machirs hebräischer Übersetzung). Die Hauptfigur hat hier ganz andere Buchstaben als in den Redaktionen der ersten Gruppe.

Ich ziehe unbedingt die Redaktion im Cod. Leid. 930 (Abu-Nasr-Mansur) vor, die ich aus folgenden Gründen für die ursprüngliche Redaktion des Menelaos betrachte:

1. In dieser Redaktion kommt ein Spezialfall vor, den ich weder im Ptolemaios noch im Theon finde, der aber in den Gerhardschen und Jacob ben Machirschen Übersetzungen wieder vorkommt, obwohl mit anderen Figurenbuchstaben und einem ziemlich abweichenden Text.

2. Die Figurenbuchstaben fangen in dieser Redaktion nach griechischer Gewohnheit mit A, B, Γ u. s. w. an und stimmen mit denen im Ptolemaios überein.

3. Die Beweisführung im Ptolemaios kann als eine verkürzte Wiedergabe dieser Redaktion aufgefafst werden, was dagegen nicht für die Redaktion in der Maurolycusausgabe oder für die der zweiten Gruppe zutrifft.

4. Wenn wir die Überlieferung von Nasr-Mansur als echt annehmen, so können wir gewisse Erweiterungen des Satzes im Theon dem Menelaos zuschreiben, während umgekehrt Nasr-Mansurs Redaktion sich nicht als eine Kompilation aus Theon erklären läfst, weil der oben erwähnte Spezialfall, der den Menelaosredaktionen eigen ist, im Theon fehlt.

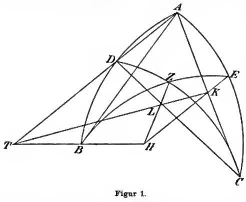
Nach Abu-Nasr-Mansur ist die Beweisführung diese[1]):

Menelaos III, 1 (Figur 1):

Zwischen zwei größten Kreisbogen ADB und AEC schneiden sich zwei andere DZC und BZE in Z. Alle vier Bogen sind kleiner als ein Halbkreis. Zu beweisen ist

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA}.^{2)}$$

Beweis: Sei H das Kugelzentrum. Man ziehe die Halbmesser HZ, HB, HE und die Gerade AD. — AD und BH, die in derselben Ebene liegen, sind entweder parallel oder nicht.



Figur 1.

Wenn sie nicht parallel sind, so schneiden sie sich entweder in der Richtung D oder in der Richtung A.

I. *AD und BH schneiden sich in der Richtung D,* und zwar in T.

Man ziehe die Geraden AKC und DLC. Nun liegen die Punkte K, L und T auf einer Geraden, nämlich der Schnittlinie der Ebenen, die durch den Bogen EZB und das Dreieck ACD bestimmt sind.

Zwischen den zwei Geraden AC und AT schneiden sich also zwei andere CD und TK in L. Folglich wird [Menelaos' Satz in der Ebene]

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CL}{LD} \cdot \frac{DT}{TA},$$

aber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{CK}{KA} &= \frac{\sin CE}{\sin EA} \\ \frac{CL}{LD} &= \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \end{aligned}\right\} \text{(Ptol. } Synt. \text{ ed. Heiberg I, p. 70),}$$

1) Mitteilung von R. Besthorn.

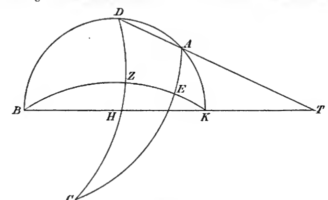
2) In dem ursprünglichen Menelaostext stand sicher wie in Gerhards Übersetzung: $\frac{\text{crd.}\,2CE}{\text{crd.}\,2EA} = \frac{\text{crd.}\,2CZ}{\text{crd.}\,2ZD} \cdot \frac{\text{crd.}\,2DB}{\text{crd.}\,2BA}$. Wie die Araber und Halley werden wir die „corda dupli arcus“ mit „sin“ ersetzen. Es kommt nämlich auf dasselbe heraus, da Menelaos fast immer mit Verhältnissen operiert. Wenn im folgenden in der Wiedergabe von Menelaos' 3. Buch die Sinusfunktion benutzt ist, muſs der Leser sich also immer erinnern, daſs Menelaos sicher wie Ptolemaios ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν gesagt hat.

$$\frac{DT}{TA} = \frac{\sin DB}{\sin BA}$$ (Ptol. *Synt.* ed. Heiberg I, p. 72),

also:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Beweis finden wir in Ptolemaios *Syntaxis*[1]) wieder; da stehen auch die nötigen Hülfssätze aus der Geometrie der Ebene. Diese Hülfssätze sind



Figur 2.

im Menelaos als bekannt vorausgesetzt. Sie standen also in einem anderen Werk von Menelaos selbst oder von einem seiner Vorgänger.

II. (Figur 2.) *AD und BK schneiden sich in der Richtung A*, und zwar in *T*.

Wir verlängern die Bogen BDA und BZE bis zum Schnitt auf dem Durchmesser BH in K.

Dann wird (mit Anwendung des ersten Teils des Beweises auf die Figur $DAKECZ$):

$$\frac{\sin CZ}{\sin ZD} = \frac{\sin CE}{\sin EA} \cdot \frac{\sin AK}{\sin KD},$$

und durch Umtausch der Glieder:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin KD}{\sin AK}.$$

Nun ist $\sin KD = \sin DB$ und $\sin KA = \sin BA$[2]), also wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Teil des Beweises fehlt sowohl im Ptolemaios als bei Gerhard.

1) *Syntaxis* I, cap. 13, ed. Heiberg I, p. 74—76.

2) d. h. $\sin(\pi \div a) = \sin a$; vgl. die Formel 1 Seite 13 und Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Heiberg I, p. 36; vgl. Theons *Kommentar*, Baselerausgabe p. 69 unten.

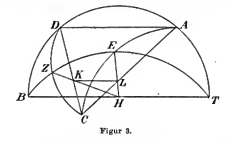
III. (Figur 3.) *Wenn* $AD \nparallel BK$, so verlängert man die Bogen BDA und BZE bis zum Schnitt auf BH in T, zieht die Geraden AC und HE, die sich in L, DC und ZH, die sich in K schneiden. Der Schnitt der Ebenen BLT und ADC wird dann $\nparallel AD$; also haben wir

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD}\text{[1]} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD};\text{[2]}$$

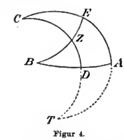
weil aber $\sin DB = \sin BA$[3]), so wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Spezialfall, der in allen mir bekannten Menelaosredaktionen vorkommt, treffen wir sonst nicht in der griechischen Litteratur.



Figur 3.



Figur 4.

IV. (Figur 4.) *In derselben Figur* $ADBZCE$ *gilt auch die Proportion*

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE}.$$

Wir verlängern die Bogen CA und CD bis zum Schnitt in T; dann wird (wegen des eben Bewiesenen)

$$\frac{\sin TA}{\sin AE} = \frac{\sin TD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE};$$

nun ist $\sin TA = \sin CA$ und $\sin TD = \sin CD$[4]), also auch:

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Satz finden wir im Ptolemaios[5]) ohne Beweis referiert, im Theon[6]) mit einem von III, 1^{I-III} unabhängigen Beweis. —

1) Euklid, *Elementa* VI, 2.
2) Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 70.
3) Vgl. Formel 1, Seite 13 oben.
4) Vgl. Formel 1, Seite 13 oben.
5) Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 76.
6) Baseleraausgabe, p. 67—68. In Tâbit ibn Korrah, *De figura sectoris* spielt dieser Beweis von Theon eine grofse Rolle.

Nach moderner Auffassung umfafst Menelaos' Satz vier Fälle, indem die Figur auf vierfache Art als ein durch eine Transversale geschnittenes Dreieck betrachtet werden kann.

Anscheinend hat Menelaos nur zwei Fälle behandelt, und zwar 1) den Fall des durch EZB geschnittenen grofsen Dreiecks ADC, und 2) den des durch ADB geschnittenen kleinen ECZ; indem er aber sowohl den Fall, dafs die Gerade AD den Durchmesser durch B einmal in der Richtung D, dann in der Richtung A schneidet, als auch den, dafs diese Geraden parallel sind, behandelt hat, so hat er den Satz so verallgemeinert, dafs er ohne weiteres das grofse Dreieck ADC mit dem anderen grofsen AEB und das kleine ECZ mit dem kleinen DBZ vertauschen kann.

Es zeigt sich also, dafs im Menelaos *der Satz allgemein bewiesen ist, und zwar in der knappsten Form, dafs dann Ptolemaios aus diesem Beweis das für seinen Zweck Notwendige ausgewählt hat, während Theon*[1]) (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 16) *den Beweis mit überflüssigen Fällen, die sich auf die schon bewiesenen zurückführen lassen, beschwert hat,* ein Verfahren, das seinen Höhepunkt in den 18 modi bei Tâbit ibn Korrah[2]) erreicht.

Wie so oft, zeigt es sich auch hier, dafs die älteste Textform die exakteste ist.

Ob der Satz des Menelaos dem Menelaos angehört, wollen wir später erörtern, doch bemerken wir gleich, dafs er nicht als Dreieckssatz formuliert ist, und dafs die allgemeine Formulierung (ἡ πρότασις) fehlt. Es könnte das ein Zeichen davon sein, dafs der Satz ursprünglich in einem astronomischen Werke bewiesen und in Menelaos' *Sphärik* übergegangen ist.

Menelaos III, 2 (Figur 5):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ

$$\angle A = D \quad \textit{und} \quad \begin{cases} \angle C = Z \\ \quad \textit{oder} \\ \angle C + Z = 180^0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin BC} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}. \tag{1}$$

Beweis: Sei $\smile AH = DZ$ und $\angle AHT = EZD$, so wird

$\triangle EZD \cong \triangle THA$ (I, 14) d. h. $\smile TA = DE$, $\smile HT = EZ$.

1) Baselerausgabe, p. 68—70.

2) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 46; v. Braunmühls Vermutung, dafs das „lemma in 18 modis“ von Tâbits Schrift herstammt, wird durch eine Untersuchung von Tâbits Werk im Cod. Arsenal. 1035 bestätigt.

Je nachdem $\angle AHT = C$ oder $\angle AHT + C = 180^0$, wird $\smile CK + KH = 180^0$ oder $\smile CK = KH$ (I, 10), d. h. in beiden Fällen $\sin CK = \sin KH$, und da

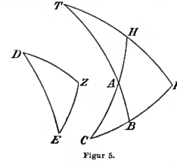
$$\frac{\sin KC}{\sin CB} = \frac{\sin KH}{\sin HT} \cdot \frac{\sin TA}{\sin AB} \quad \text{(III, 1)},$$

so wird

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin TA}{\sin HT}, \text{ d. h. } = \frac{\sin DE}{\sin EZ} \quad \text{q. e. d.}$$

II. Umgekehrt, wenn $\angle A = D$ und $\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}$, folgt, dafs $\angle C = Z$ oder $\angle C + Z = 180^0$.[1])

Für $\angle A = D$ und $\angle C = Z = 90^0$ [der Spezialfall, den Menelaos selbst meistens verwendet] hat man, wie v. Braunmühl gezeigt hat, den später unter dem Namen *„Regula quattuor quantitatum"* bekannten Satz, worüber siehe v. Braunmühl, *Gesch. der Trig.* I, p. 17, 47, 58—60, 81, 127—129 u. s. w.



Figur 5.

Für $DE = 90^0 (= DZ)$ und $\angle C = Z = 90^0$ geht (1) in die Grundformel I für rechtwinklige Dreiecke über.

Es ist für Ptolemaios' Behandlung der sphärisch-trigonometrischen Probleme charakteristisch, dafs er mehrmals den Satz des Menelaos anwendet, auch da, wo Menelaos III, 2 direkt anwendbar ist, so dafs er ganz eigentlich die regula quattuor quantitatum (III, 2) aufs Neue beweist, statt auf sie als schon bekannt hinzuweisen. Es ist dies um so auffallender, weil die Rechnung durch Anwendung von III, 2 mit viermaligem Nachschlagen in der Sehnentafel erledigt wird, während die Anwendung von Menelaos' Satz immer sechsmaliges fordert. Als Beispiel dient folgendes:

Zur Berechnung der Deklinationstafel würde Menelaos III, 2 die Formel:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \delta} = \frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon}$$

(λ die Länge, δ die Deklination des Ekliptikpunktes und ε die Neigung der Ekliptik) gegeben haben, die für die Berechnung leichter ist als

$$\frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90^0}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin 90^0},$$

die wir bei Ptolemaios (*Syntaxis* I, cap. 14) finden.

1) Das Corollar zu III, 2 in der Halleyausgabe ist vom Herausgeber hinzugefügt.

Ähnliche Beispiele finden sich in der *Syntaxis* II, cap. 3 und cap. 11. Es liegt nahe, anzunehmen, daſs Ptolemaios in diesen Fällen eine ältere Methode nachgeahmt hat, ohne auf die von Menelaos eingeführte Erleichterung Rücksicht zu nehmen.

Menelaos III, 3 (Figur 6):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \qquad \angle C = Z \gtrless 90^0,$$

und H und T die Pole der Bogen AC und DZ sind, dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{\sin ED}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin BH}{\sin ET}.$$

Wir legen nämlich die Dreiecke auf einander mit $\angle Z$ auf $\angle C$, und der Satz ist eine direkte Folge von III, 1.[1])

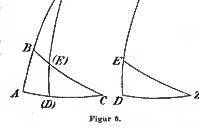
Indem $\sin BH = \cos AB$ und $\sin ET = \cos ED$, sagt der Satz, modern umgeschrieben:

$$\frac{\operatorname{tg} AB}{\operatorname{tg} ED} = \frac{\sin CA}{\sin CD}. \quad (1)$$

Es ist dies die „*Tangenten- oder Schattenregel*" der Araber (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 17—18, 58, 67—69 u. s. w.).

Für $\smile CA = BC = 90^0$ geht (1) in die Grundformel II für rechtwinklige Dreiecke über.

Auch die Anwendnng dieses Satzes vermeidet Ptolemaios und beweist ihn jedesmal aufs Nene durch Menelaos' Satz. Beispiele finden sich in der *Syntaxis* I, cap. 16; II, cap. 3 nnd VIII, cap. 5. In der Berechnung macht es jedoch, solange die Tangensfunktion nicht aufgestellt und eine Tangententafel nicht berechnet ist, keinen Unterschied, ob III, 1 oder III, 3 verwendet wird.



Figur 6.

Menelaos III, 4 (Figur 7):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ, wo $\angle A = D$ *und* $\angle C = Z$, *die Höhen* $\smile BH$ *und* $\smile ET$ *gezogen sind, so ist das Sinusverhältnis der Basensegmente gleich*, d. h.

$$\frac{\sin AH}{\sin DT} = \frac{\sin CH}{\sin ZT}.$$

1) Das Corollar zu III, 3 in der Halleyausgabe rührt von Halley selbst her.

Es ist dies eine direkte Folge von III, 3, da beide Verhältnisse gleich $\frac{\operatorname{tg} BH}{\operatorname{tg} ET}$ sind.

Menelaos III, 5 (Figur 8):

Obwohl der Text dieses Satzes sowohl in der Rezension des Nasr-Mansur als in der Gerhardschen Übersetzung stellenweise verdorben ist, läfst sich der Beweis durch Vergleich dieser zwei Redaktionen mit Sicherheit wiederherstellen, und zwar so:

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABG und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \quad \angle G = Z, \quad \smile AG < 90^0, \quad \smile DZ < 90^0,$$

dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)}.$$

Beweis: Sei nämlich

$$\smile LG = GK = AG$$

und analog

$$\smile FZ = ZQ = DZ.$$

Figur 7.

Mit G und Z als Pole ziehen wir die gröfsten Kreise bezw. $NSMH$ und $ROCT$. Denken wir uns die Bogen AS und AM verlängert bis zum Schnitt in A', so wird $\smile KG + GA' = 180^0$, und da $\smile GM = 90^0$, so wird $\angle KGM = \angle MGS$ (I, 26) und analog wird $\angle QZC = \angle CZO$, und weil $\angle G = Z$, so sind alle diese vier Winkel gleich. Analog erhält man:

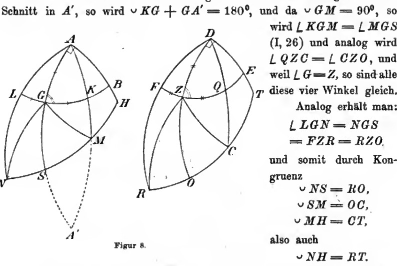
$$\angle LGN = NGS = FZR = RZO$$

und somit durch Kongruenz

$$\smile NS = RO, \quad \smile SM = OC, \quad \smile MH = CT,$$

also auch

$$\smile NH = RT.$$



Figur 8.

Da nun die zwei Bogen BL und HN durch die vier Bogen AH, AM, AS und AN geschnitten werden, so gilt:

$$\frac{\sin BL}{\sin LG} \cdot \frac{\sin GK}{\sin KB} = \frac{\sin HN}{\sin NS} \cdot \frac{\sin SM}{\sin MH}. \tag{1}$$

Da aber $\smile GK = LG$, werden diese Verhältnisse

$$= \frac{\sin BL}{\sin KB} = \frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)}.$$

Analog erhält man:

$$\frac{\sin EF}{\sin FZ} \cdot \frac{\sin ZQ}{\sin QE} = \frac{\sin TR}{\sin RO} \cdot \frac{\sin OC}{\sin CT} \tag{2}$$

$$= \frac{\sin EF}{\sin QE} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)}.$$

Die zwei Reihen von Verhältnissen (1) und (2) sind aber gleich, weil $\smile HN = TR$, $\smile NS = RO$ u. s. w. (s. oben), d. h.

$$\frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)} \quad \text{q. e. d.}$$

Wie v. Braunmühl[1]) schon bemerkt hat, liegt in diesem Satz die moderne Formel

$$\frac{\sin (a + b)}{\sin (a \div b)} = \frac{1 + \cos C}{1 \div \cos C},$$

da es ja schon bewiesen ist, dafs das Verhältnis $\frac{\sin (a + b)}{\sin (a \div b)}$ in zwei Dreiecken mit gleichem C gleich wird (die Voraussetzung $\angle A = D = 90^0$ wird in Menelaos' Beweis scheinbar nicht gebraucht).

Das interessiert uns aber nicht so sehr, wie die Voraussetzung, die in der Behauptung der Gleichheit der Verhältnisse (1) [oder (2)] liegt.

Es ist nämlich dies nichts anderes als *die* ***Projektivität der Doppelverhältnisse auf der Kugel,*** *die hier ohne irgend einen Beweis als bekannt vorausgesetzt wird.* Nicht nur ist es an sich interessant, zu erfahren, dafs dieser Satz den Griechen bekannt war, sondern wir können für die Geschichte der Trigonometrie aus der frühen Existenz dieses Jahrhunderte lang begrabenen Satzes wichtige Schlüsse ziehen.

Die eigentümliche Überlieferungsgeschichte dieses Satzes zeigt uns, wie er nach und nach verschollen ist.

Die Araber, die den Satz ohne Erklärung vorausgesetzt fanden, verzweifelten daran, ihn verstehen zu können.

Abu-Nasr-Mansur sagt[2]): *„In Bezug auf diesen Beweis drückt sich Menelaos sehr unklar aus, entweder weil er ein Liebhaber von Schwierigkeiten war, um über sein Buch Dispute zu erregen, oder aber weil er im Besitz von allem war, was er zum Beweise notwendig hatte."* Nach dieser

1) v. Braunmühl, l. c. p. 18.
2) Mitteilung von R. Besthorn.

Bemerkung giebt Nasr-Mansur dann einen anderen Beweis von eigener Erfindung.

Al-Harawi[1]) giebt nur verstümmelte Andeutungen von Menelaos' Beweis, fügt mittels des Sinussatzes einen anderen von sich selbst hinzu und sagt: *„Es ist dies der Beweis, den ich zu diesem Satze konstruiert habe, und auf welchen Menelaos anspielt, indem er durch Postulate noch mehr beweist."*

Gerhard von Cremona, dessen Übersetzung sonst von mathematischen Ungenauigkeiten ziemlich frei ist, bringt eben in diesem Beweise mehrere Proportionen, die falsch sind, indem er hier den Beweis offenbar ebensowenig verstanden hat wie der Rezensent der ihm vorliegenden arabischen Handschrift.

Einem anonymen Kommentator der Gerhardschen Übersetzung (aus dem 13. Jahrh., wahrscheinlich **Campanus**[2])) ist es bei diesem Beweise zu heifs geworden, und von da an kommentiert er Menelaos' *Sphärik* nicht weiter.

In dem Exemplare der Gerhardübersetzung, das **Georg v. Peurbach** und Regiomontanus[3]) haben abschreiben lassen, werden die Fehler einfach abgeschrieben.

Dafs **Regiomontanus** sich mit dem Verständnis des Satzes III, 5 im Menelaos gequält, zeigt ein Brief, den er im Jahre 1464 (Venedig, Februar?) dem italienischen Astronomen Bianchini schickte, und zwar als Antwort auf mehrere von demselben gestellten Fragen. Es kommt nämlich hier folgender Passus vor (vgl. Murr, *Memorabilia bibliothecarum Norimbergensium* I, p. 116—118):

„Vestrum responsum erit, hanc positionem (von 2 auf bestimmte Weise gegebenen Sternörtern) *esse impossibilem, et confiteor me ex proposito ita supposuisse, ut intelligerem, si apud vos esset Menelaus de sphericis figuris,* ***in cuius tertio libro quinta propositio iam diu me suspensum tenuit, quotquot reperio exemplaria omnia in hac parte imminuta sunt;*** *alii vocant Mileum, ne nomen vos aliud persva-*

1) Mitteilung von R. Besthorn.

2) Im Cod. S. Marco Venetiarum XI, 90 (vgl. oben Seite 10) steht zuerst (fol. 1—35) Theodosios' *Sphärik* „cum commento Campani", gleich danach Menelaos' *Sphärik* (fol. 35—84) mit einem Kommentar, der spätestens um das Jahr 1300 verfafst worden sein kann.

3) Dieses Exemplar liegt im Cod. S. Marco Venet. XI, 63 vor (vgl. oben Seite 10). Diese Handschrift enthält aufserdem *„Epitome Almagesti"*, verfafst von Peurbach und Regiomontanus. Es ist dies die älteste der mir bekannten Handschriften, wo die Gerhardsche Übersetzung: „Milei *de speris*" mit der *Sphärik* des Menelaos identifiziert wird.

deat, alium esse librum quam vos putatis; **sed Menelaus vere dicitur** ....". Aus diesen Worten schliefsen wir, dafs Regiomontanus schon während seines ersten Aufenthaltes in Rom (1461) sich mit Gerhards Übersetzung von Menelaos' *Sphärik* bekannt gemacht hat, und dafs er (oder vielleicht schon Georg v. Peurbach oder Georg v. Trapezunt) mit Hülfe von dem Bericht in Theons *Kommentar* (vgl. oben Seite 4) die Identität der Namen Menelaos und Mileus festgestellt hat; denn Georg v. Trapezunt hatte schon vor dem Tode Georgs v. Peurbach (1461) eine Bearbeitung von Theons Werk erledigt (vgl. Cantor II, p. 193—194 und 234—237). Wir sind auch zu der Annahme berechtigt, dafs eben die Kenntnis der *Sphärik* des Menelaos den Regiomontanus zu seinem berühmten Werk: *„De triangulis omnimodis"* veranlafste; denn, wie aus dem obigen Passus hervorgeht, hatte er im Jahre 1464 schon lange die *Sphärik* des Menelaos studiert, kannte mehrere Handschriften derselben und hatte offenbar Menelaos' Werk bei sich in Venedig im Jahre 1464. Aus anderen Quellen wissen wir, dafs er sein Werk *de triangulis* in Rom 1461 zu verfassen anfing und es in Venedig weiter bearbeitete; aufserdem hat v. Braunmühl nachgewiesen, dafs ganze Reihen von Sätzen aus Regiomontanus' Werk mit denen im Menelaos zusammenfallen. — Die weitere Untersuchung des Briefes an Bianchini zeigt mir, dafs es Regiomontanus nicht gelang, den Beweis Menelaos III, 5 zu verstehen (vgl. Murr I, Tafel 3, Fig. XVIII).

In den Druckausgaben von **Maurolycus** und **Halley** stehen ganz andere Beweise, nicht kugelgeometrisch, sondern durch Orthogonalprojektion geführt. Den Ursprung dieser Beweise habe ich nicht ermitteln können. Älter als c. 1265 (Nassir-eddîn-Tûsi oder Jacob ben Machir) sind sie jedoch kaum.

Damit war nun der Satz über die Erhaltung des Sinusdoppelverhältnisses bei Projektion (auf der Kugel) ganz verschollen, bis er *im Anfang des 19. Jahrhunderts* neu entdeckt wurde.[1])

Unsere Frage ist jetzt: Wie bewiesen Menelaos' Vorgänger diesen Satz? Dafs Menelaos den Satz selbst erfunden und diese Erfindung in seiner *Sphärik* nicht aufgenommen habe, können wir ja doch nicht annehmen.

Es zeigt sich, dafs der Satz eine einfache Folge von Menelaos' Satz ist.[2])

---

1) Vgl. Gudermann, *Lehrbuch der niederen Sphärik,* Münster 1835, § 184—185. — Vielleicht stand der Doppelverhältnissatz (auf der Kugel) schon bei F. Schulz, *Die Sphärik oder die Geometrie der Kugelfläche,* Leipzig 1828 (Mitteilung von v. Braunmühl).

2) Bei Gudermann wird der Doppelverhältnissatz sowie der Satz des Menelaos auf der Kugel durch den Sinussatz bewiesen.

Verlängern wir nämlich (Figur 9) die Bogen LB und NH bis zum Schnitt in X, so giebt Menelaos' Satz:

$$\frac{\sin MX}{\sin XK} = \frac{\sin MH}{\sin HA} \cdot \frac{\sin AB}{\sin BK}$$

($\triangle\, XBH$ durch AKM geschnitten. Menel. III, 1^{IV})

$$= \frac{\sin MS}{\sin SA} \cdot \frac{\sin AG}{\sin GK}$$

($\triangle\, XGS$ durch AKM geschnitten. Menel. III, $1^{\text{I—III}}$). Gleichfalls

$$\frac{\sin NX}{\sin XL} = \frac{\sin NH}{\sin HA} \cdot \frac{\sin AB}{\sin BL}$$

($\triangle\, XBH$ durch ALN geschnitten. Menel. III, 1^{IV})

$$= \frac{\sin NS}{\sin SA} \cdot \frac{\sin AG}{\sin GL}$$

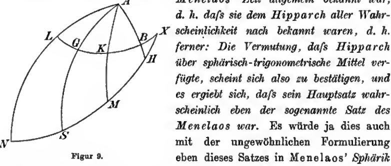
($\triangle\, XGS$ durch ALN geschnitten. Menel. III, 1^{IV}).

Durch Elimination erhält man dann sofort das gewünschte Doppelverhältnis

$$\frac{\sin BL}{\sin LG} \cdot \frac{\sin GK}{\sin KB} = \frac{\sin HN}{\sin NS} \cdot \frac{\sin SM}{\sin MH}.$$

Wir erhalten also den Satz durch viermalige Anwendung von III, 1. Durch III, 2 dagegen läfst der Satz sich nur auf einem grofsen Umweg beweisen.

Ich schliefse also, dafs *sowohl Menelaos' Satz, als der Satz über die Projektivität der Doppelverhältnisse* (Sinusverhältnisse) *auf der Kugel zu Menelaos' Zeit allgemein bekannt war, d. h. dafs sie dem Hipparch aller Wahrscheinlichkeit nach bekannt waren, d. h. ferner: Die Vermutung, dafs Hipparch über sphärisch-trigonometrische Mittel verfügte, scheint sich also zu bestätigen, und es ergiebt sich, dafs sein Hauptsatz wahrscheinlich eben der sogenannte Satz des Menelaos war.* Es würde ja dies auch mit der ungewöhnlichen Formulierung eben dieses Satzes in Menelaos' *Sphärik* übereinstimmen. Wie so oft, geht es auch hier so, dafs das, was den Namen eines Mannes bekannt gemacht hat, seinen Vorgängern gehört.



Figur 9.

Es erhebt sich nun die Frage, inwiefern die Analogen dieser zwei Sätze in der Ebene auch vor Menelaos bekannt waren. Es ist schon lange bekannt, dafs sie in Pappos' συναγωγή (ca. 200 Jahre nach Menelaos) stehen und zwar als Lemmata zu Euklids *Porismen*. In den Restitutions-

versuchen dieses leider verlorenen Werkes haben eben diese zwei Sätze eine Hauptrolle gespielt, indem man geneigt war, sie dem **Euklid** zuzuschreiben.[1])

Der Doppelverhältnissatz tritt bei **Pappos** nicht in der allgemeinen Form auf, in welcher er von **Menelaos** angewandt wird. Da heifst es nämlich[2]):

Wenn drei Geraden durch o (Figur 10) durch zwei andere geschnitten werden, so wird:

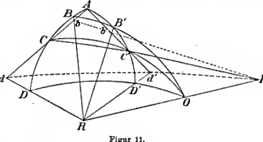
$$\frac{ab}{ad}\cdot\frac{cd}{cb}=\frac{ab'}{ad'}\cdot\frac{c'd'}{c'b'}$$

und dieser Spezialsatz kann ganz wie der allgemeine durch **Menelaos'** Satz bewiesen werden, was doch im **Pappos** nicht geschehen ist.

Figur 10.

Bemerkenswert ist es aber, dafs dieser Spezialfall auf die Kugel auf ganz ähnliche Weise wie **Menelaos'** Satz übertragbar ist, und zwar so:

Wir wählen (Figur 11) den Durchschnittspunkt (O) der zwei Bogen CC' und DD' aufserhalb der Bogen ACD und $AC'D'$ und führen ferner die Figur aus, ganz wie beim Beweise von **Menelaos'** Satz. Dazu fügen wir noch einen willkürlichen Bogen $BB'O$ durch O; so wird die Verbindungsgerade bb' durch den Durchschnittspunkt (P) der Geraden CC' und RO gehen, weil b, b' und P sowohl in der Ebene des Bogens $BB'O$, wie in der des Dreiecks ACC' liegen. In der Ebene haben wir dann die gleichen Doppelverhältnisse:



Figur 11.

$$\frac{Ab\cdot Cd}{Ad\cdot Cb}=\frac{Ab'\cdot C'd'}{Ad'\cdot C'b'},$$

wo

$$\frac{Ab}{Cb}=\frac{\sin AB}{\sin CB},\quad \frac{Cd}{Ad}=\frac{\sin CD}{\sin AD}$$

1) Vgl. Chasles, *Les trois livres des Porismes d'Euclide,* Paris 1860, p. 11 und 75. — Eine treffliche Darstellung der Bedeutung der zwei hier erwähnten Sätze finden wir in Chasles, *Aperçu historique,* Paris 1875, p. 26—27, 33—35, 291—296 und 302—308.

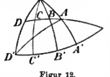
2) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 870 ff. und 1038.

(Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 70 und 73), und analog auf der rechten Seite, d. h.

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = \frac{\sin AB'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'D'}{\sin AD'} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Spezialfall läfst sich dann sehr leicht mit Hülfe eines Hülfsbogens (AD', siehe Figur 12) zu dem allgemeinen Satz, den Menelaos gebraucht, erweitern.

Diese Möglichkeit einer direkten Übertragung des Doppelverhältnissatzes beeinträchtigt nicht die Schlüsse, die wir oben gezogen haben. Denn auch dieses direkte Übertragen setzt die Kenntnis der Übertragung von Menelaos' Satz voraus.



Figur 12.

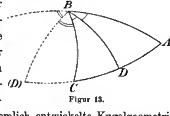
Deswegen können wir die enge geschichtliche Verbindung zwischen Menelaos' Satz und dem Doppelverhältnissatze sowohl in der Ebene wie auch auf der Kugel, die Chasles schon befürwortet, als festgestellt zu betrachten wagen. Auch meinen wir, dafs Chasles' Restitution von Euklids *Porismen* hier eine Bestätigung findet. *Die beiden Sätze in der Ebene standen offenbar in Euklids Werk, das somit die Elemente zur Erfindung der sphärischen Trigonometrie lieferte.*[1])

In der That ist Menelaos' Satz ein ausgezeichnetes Mittel zum Beweise kugelgeometrischer Sätze. Eine Reihe von wichtigen Theoremen, die nach Chasles alle in Euklids *Porismen* standen, können sowohl in der Ebene wie auf der Kugel allein mit Hülfe von Menelaos' Satz bewiesen werden, z. B. der Satz vom harmonischen Verhältnis und vom vollständigen Viereck (Pappos VII, 131 und Staudt, *Geometrie der Lage* Nr. 59). Sobald aufserdem der Doppelverhältnissatz, der lediglich als eine Folgerung aus Menelaos' Satz erscheint, bewiesen ist, so lassen sich noch andere wichtige Sätze beweisen, z. B. die Involution der Punkte, die durch den Schnitt eines vollständigen Vierecks durch eine beliebige Transversale ge-

1) Auch in der Kegelschnittlehre im Altertum spielte der Doppelverhältnissatz, wie es scheint, eine Rolle. Zeuthen vermutet nämlich (vgl. Keglesnitslæren i Oldtiden, p. 59 und 105—106), dafs Apollonios ihn zu den Tangentenbestimmungen bei der Ellipse und der Hyperbel, sowie zur Bestimmung des Kegelschnitts als Ort zu vier Geraden benutzte. Wenn wir nun die Existenz dieses Satzes (und zwar in seiner allgemeinen Form) vor Menelaos nachweisen können, so dürfte in diesem Falle Zeuthens Hypothese eine Bestätigung finden, die vielleicht diejenigen, die noch an der Richtigkeit der Zeuthenschen Hypothesen in Bezug auf die Kenntnis der Griechen zur Projektivitätslehre zweifeln, überzeugen können. Menelaos' *Sphärik* leistet uns meiner Ansicht nach den Beweis dafür, dafs die auf Pappos' Lemmata beruhende rückschliefsende Methode, die Chasles und Zeuthen benutzten, in der That zulässig ist.

bildet wird (Pappos VII, 130 und Desargues, ed. Poudra I, p. 119). Chasles' Restitution der *Porismen* beruht nun eben darauf, dafs er die gegenseitige Abhängigkeit aller dieser Sätze, von denen die wichtigsten und elementarsten in Pappos' Lemmata stehen, erkannt hat; mit Recht hat er dann den Schlufs gezogen, dafs alle die hier erwähnten Sätze in den *Porismen* standen und den Kern dieses Werkes bildeten.

Der weitere Schlufs, den wir ziehen können, ist, dafs die Griechen wahrscheinlich erkannten, dafs alle die Sätze ans der Ebene, die in den *Porismen* nur den Satz des Menelaos und den Doppelverhältnissatz voraussetzen, auf die Kugel direkt übertragbar sind, wenn man nur immer die Geraden mit den Sehnen des doppelten der entsprechenden Bogen ersetzt. Es ist nämlich kaum denkbar, dafs die Griechen, die die zwei Hauptsätze der *Porismen* aus der Ebene auf die Kugel übertrugen, nicht auch die daraus folgenden Konsequenzen erkannten. Es ist somit die Vermutung berechtigt, dafs schon vor Menelaos eine ziemlich entwickelte Kugelgeometrie existierte; es ist aber dies lediglich eine plausible Vermutung, zu deren Beweis uns die nötigen Belege fehlen.



Figur 13.

Mit III, 5 sind die sphärischen Haupttheoreme erledigt, und nun folgen mehrere wahrscheinlich aus der Ebene übertragene Sätze.

Menelaos III, 6 (Figur 13) sagt:

Wenn der Winkel am Scheitel eines sphärischen Dreiecks halbiert wird, ist das Sinusverhältnis der Basensegmente gleich dem der einschliefsenden Bogen.

Gegeben: $\angle ABD = \angle DBC.$

Zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin BC}{\sin DC}.$$

Durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke ABD und CBD erhält man sofort diese Proportion, indem die Winkel an B gleich sind, die an D Supplementwinkel.

Der umgekehrte Satz und der analoge für Halbierung des Aufsenwinkels werden auch bewiesen.

Den analogen Satz der Ebene (Euklid, *Elem.* VI, 3) hat Menelaos wahrscheinlich schon im ersten Buche auf die Kugel zu übertragen versucht. Erst hier ist es ihm gelungen, ein sphärisches Analogon, freilich in anderer Form, und zwar in der eines Sehnenverhältnisses statt eines Bogenverhältnisses, zu gewinnen.

Menelaos III, 7 (Figur 14) sagt:

Wenn wir vom Scheitel B eines sphärischen Dreiecks zwei Bogen ziehen (BD und BE), *die mit den einschliefsenden Seiten* (BA *und* BC) *gleiche Winkel bilden, so wird bewiesen, dafs:*

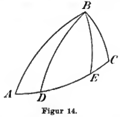
$$\frac{\sin EA \cdot \sin AD}{\sin DC \cdot \sin CE} = \frac{\sin^2 AB}{\sin^2 BC},$$

und umgekehrt, dafs, wenn diese Proportion besteht, die Winkel ABD *und* EBC *gleich werden.*

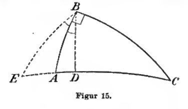
Bei der Erfindung dieses Satzes hat offenbar die Satzgruppe I, 26—35 eine Rolle gespielt.

Menelaos III, 8 (Figur 15) sagt:

Wenn in dem an B rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC *durch B*



Figur 14.



Figur 15.

zwei gröfste Kreisbogen gezogen werden, die mit BA *gleiche Winkel bilden, so besteht die Proportion:*

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA};$$

denn die beiden Verhältnisse sind gleich $\frac{\sin BE}{\sin BD}$ (III, 6).

Umgekehrt, wenn

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA}$$

und $\angle EBA = ABD$, wird bewiesen, dafs $\angle ABC = 90^0$, und wenn $\angle ABC = 90^0$, dafs $\angle EBA = ABD$; in beiden Fällen folgt der Beweis durch III, 6.

Die Sätze III, 7—8 sind offenbar wie III, 6 aus der Ebene übertragen; welchen Werken der Geometrie der Ebene Menelaos sie entnommen hat, können wir jedoch nicht konstatieren.

III, 8, der Satz von der *harmonischen Teilung* (BA und BC halbieren ja $\angle EBD$ und dessen Supplementwinkel), war wenigstens zur Zeit des Apollonios bekannt. Diesen Satz sowie die harmonische Teilung überhaupt scheint nämlich Apollonios genau erörtert zu haben, und zwar in

seinen τόποι ἐπίπεδοι.[1]) Die harmonische Teilung wurde auch in Apollonios' *Kegelschnittlehre* benutzt, und die harmonische Teilung einer Kegelschnittsehne durch Pol und Polar vielfach erörtert.[2]) Aber schon in Euklids *Porismen* wurde sicherlich die harmonische Proportion ausgiebig verwertet; denn von Pappos' Lemmata bezieht sich eine ganze Reihe auf die harmonische Teilung.[3]) Menelaos' Übertragung einer der allgemeinsten projektivischen Eigenschaften der harmonischen Proportion auf die Kugel suppliert somit die übrige Überlieferung und fügt ein bis jetzt fehlendes Glied hinzu; denn Menelaos' Beweis ist offenbar direkt aus der Ebene übertragen.

Den Beweis für III, 7 referierten wir nicht, weil derselbe kaum aus der Ebene übertragen ist; denn den analogen Satz der Ebene finden wir im Pappos[4]) als Lemma zu Theodosios' *Sphärik* III, 6, und zwar mit einem ganz anderen Beweis. Es ist von Simson[5]) angenommen worden, dafs dieser Satz in der verlorenen Schrift des Apollonios *„von dem bestimmten Schnitt"* (περὶ διωρισμένης τομῆς) stand. In der That finden sich ganz ähnliche Sätze unter Pappos' Lemmata[6]) zu diesem Werk, und da der Satz (in der Ebene) doch jedenfalls älter als Menelaos ist, dürfte Simsons Schlufs richtig sein. Bemerkenswert ist, dafs dieser Satz gerade zum Beweis desjenigen Lemmas im Pappos verwendet wird, aus welchem Zeuthen[7]) folgert, wie Apollonios in der Schrift vom bestimmten Schnitt einen Doppelpunkt in einer durch zwei Punktepaare gegebenen Involution bestimmt hat. Es ist ganz deutlich, dafs die Vorgänger des Menelaos, die zuerst die zu trigonometrischen Berechnungen verwendbaren kugelgeometrischen Sätze erfunden haben, so wie Menelaos selbst einen ausgiebigen Gebrauch der meistens verlorenen Schriften, die Pappos unter dem Namen τόπος ἀναλυόμενος zusammenfafst, gemacht haben. Auf der anderen Seite aber dient

1) Vgl. Eutokios' *Kommentar zu Apollonios, Apollonii Pergaei quae Graece exstant*, ed. Heiberg II, p. 180 ff. — Vgl. auch Chasles, *Les trois livres des Porismes*, p. 269 ff.; und Heiberg, *Litt. Stud.* p. 70—71.

2) Vgl. Apollonios, ed. Heiberg I, p. 102 und 386—412; vgl. auch Zeuthen, l. c. p. 59 und 82—84.

3) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 896—912 und 1266—1267; vgl. auch Chasles, *Porismes*, p. 79—81, 187—188, 210—211, 255—256, 261—262, 266—269, 273—278 und 317—320, wo die harmonische Teilung in Chasles' Restitution der *Porismen* vorkommt.

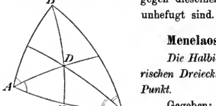
4) Pappos, ed. Hultsch, p. 488—490. Dieses Lemma ist nicht ein Hülfssatz zum Beweise des Theodosios, sondern zu einem neuen Beweis von Pappos zu Satz III, 6 des Theodosios; vgl. Pappos, p. 504.

5) Simson, *De sectione determinata, opera quaedam reliqua* p. 16.

6) Pappos, ed. Hultsch, p. 708—714, 718—722, 726 und 730—734.

7) Zeuthen, l. c. p. 132.

Menelaos' *Sphärik* dazu, uns zu bestätigen, dafs die Schlüsse, die namentlich von Forschern wie Chasles und Zeuthen in Bezug auf die verlorenen Schriften gezogen worden sind, im grofsen und ganzen richtig, und die gegen dieselben erhobenen Einwände und Zweifel unbefugt sind.



Figur 18.

Menelaos III, 9 (Figur 16) sagt:

Die Halbierungsbogen der Winkel eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Gegeben: $\angle BAD = DAC$

und

$\angle BCD = DCA.$

Wenn BDE gezogen wird, ist zu beweisen, dafs $\angle ABE = EBC$.

Beweis:

$$\frac{\sin BC}{\sin CE} = \frac{\sin BD}{\sin DE} = \frac{\sin BA}{\sin AE} \quad \text{(III, 6)},$$

also

$$\frac{\sin AE}{\sin CE} = \frac{\sin BA}{\sin BC},$$

d. h. $\angle ABE = EBC$ (III, 6, zweiter Teil) q. e. d.[1])

Der entsprechende Satz in der Ebene war Euklid bekannt, wie die Konstruktion *Elem.* IV, 4: *„in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben"* zeigt.

Menelaos III, 10 sagt:

Die Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Der lange, durch III, 1, 6, 8 und 9 geführte Beweis bietet kein besonderes Interesse.

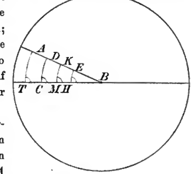
Dafs der entsprechende Satz in der Ebene dem Archimedes bekannt war, zeigt uns sein *„liber assumptorum"* 5—6.[2])

Die folgenden Sätze der *Sphärik*, III, 11—14 sind sehr eigentümlich und erinnern an Menelaos' zweites Buch. Es kommen hier Theoreme vor, die als Dreieckstheoreme formuliert sind, sich aber offenbar von astronomischen ableiten. Teilweise begegnen wir hier Sätzen, die wir von der *alten Sphärik* durch Euklids φαινόμενα, Theodosios' *Sphärik* bis zu Menelaos und Ptolemaios verfolgen können; solche Sätze sind die über die Ungleichheit der den gleichen Ekliptikbogen entsprechenden Rektascensions-,

1) Das Corollar zu III, 9 in der Halleyausgabe ist unecht.

2) Archimedis *opera*, ed. Heiberg II, p. 433 ff.

Obliquascensions- und Morgenweitendifferenzen, die hier merkwürdigerweise durch die vorhergehenden sphärisch-trigonometrischen Hauptttheoreme bewiesen werden, ohne daſs ein astronomischer Begriff eingeführt wird, und ohne daſs ein einziges Berechnungsbeispiel vorkommt. Wie oft hervorgehoben, verlieren solche Sätze jeden Wert, sobald die darin liegenden astronomischen Probleme einmal rechnerisch behandelt sind. Eine derartige Behandlungsweise schrieben wir oben dem Hipparch zu; deswegen interessieren uns diese Sätze an sich nunmehr herzlich wenig, um so mehr aber gewisse Schlüsse in Bezug auf die Trigonometrie der Ebene, die wir daraus ziehen können.



Figur 17.

III, 11 bezieht sich auf die Vergleichung von Ekliptikbogen mit den Horizontalbogen, in welchen dieselben aufgehen. Ist nämlich (Figur 17) BA die Ekliptik, BT der Äquator, so daſs $AB > AT$ (d. h. der Beweis ist nur für Orte auſserhalb der Polarzonen gültig), und sind die Winkel an T, C, M und H gleich und $\gtreqless 90^0$ (AT, DC, KM und EH stellen also verschiedene Lagen des Horizontes dar), so ist zu beweisen:

$$\frac{DA}{KE} > \frac{AT \div DC}{KM \div EH}.$$

Der Beweis wird auf folgende Weise erledigt: Wenden wir III, 2 auf die Dreiecke ABT, DBC, KBM und EBH an, die zwei gleiche Winkel haben, so erhalten wir:

$$\sin BA : \sin BD : \sin BK : \sin BE = \sin AT : \sin DC : \sin KM : \sin EH,$$

und daraus, sagt Menelaos, folgt direkt, weil $90^0 \geq AB > AT$, was bewiesen werden soll, infolge des ersten Buches des .... (hier folgt ein unsicherer Buchtitel).

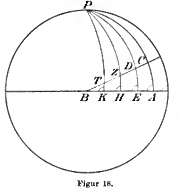
In Gerhards Übersetzung lautet diese Stelle so: „*Si ergo fuerit illud ita, tunc iam accidunt ex eo, quod diximus, omnia, quae nuper retulimus; et illud est, quia nos iam declaravimus istas res et omnes, quae sunt eis similes, in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum.*"

Nach Halleys Übersetzung[1]) aus dem Hebräischen ist der Titel: „*in prima parte libri lemmatum cyclicorum seu potius propositionum*",

1) Menelai *sphaerica*, ed. Halley, p. 98, 100 und 101.

eine Übersetzung, die Steinschneider[1]) jedoch mit *„Buch der bogenartigen Figuren"* ersetzen will. Diese Angaben sind sehr undeutlich und der ursprüngliche Titel ganz entstellt; Menelaos weist aber offenbar auf ein eigenes Werk von mehreren Büchern hin, dessen Inhalt sich zunächst auf die Verhältnisse zwischen Kreissehnen und den ihnen entsprechenden Bogen bezieht. Wir werden uns deswegen kaum irren, wenn wir die zunächstliegende Erklärung geben, nämlich dafs es sich hier um das von Theon[2]) erwähnte Werk des Menelaos: *„6 Bücher über die Geraden im Kreise"* handelt.

Nach Theons Bericht und dem Inhalt von Ptolemaios' *Syntaxis* I hat man geschlossen, dafs in diesem Werk eine Sehnentafel enthalten war. Dieser Schlufs ist sicherlich auch ganz zutreffend. Die Tafel allein und die Elemente zu deren Berechnung haben doch kaum 6 Bücher (bei Hipparch sogar 12) ausgemacht; über einiges von dem, was sonst in dem Werke stand, glaube ich nun hier in Menelaos III, 11 und den folgenden Sätzen Aufschlufs zu finden.



Figur 18.

Ich werde unten, nachdem ich kurz die Sätze III, 12—14 referiert habe, alle die in 11—14 enthaltenen Voraussetzungen sammeln, die uns über die vorptolemaiischen plantrigonometrischen Werke Aufschlufs geben dürften.

III, 12 bezieht sich auf die Vergleichung der Längen mit den entsprechenden Rektascensionen. In Figur 18 ist P Pol des Bogens BA. BA ist somit als der Äquator, BC als die Ekliptik aufzufassen. In der Voraussetzung, dafs $BC \leq 90^0$, ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}.$$

1. Beweis: Durch Anwendung von III, 5 auf die Dreiecke ABC, EBD, HBZ und KBT erhält man:

$$\frac{\sin(BC + BA)}{\sin(BC \div BA)} = \frac{\sin(BD + BE)}{\sin(BD \div BE)} = \frac{\sin(BZ + BH)}{\sin(BZ \div BH)} = \frac{\sin(BT + BK)}{\sin(BT \div BK)},$$

und dann folgt der Beweis wegen des *„in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum"* Bewiesenen (vgl. oben).

1) Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482.

2) Theons *Kommentar,* ed. Halma, p. 110; vgl. oben Seite 4.

2. *Beweis:* III, 2 und 3 geben:

$$\frac{\sin AB}{\sin BE} = \underset{\text{(III, 3)}}{\frac{\sin AC}{\sin DE}} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC} = \underset{\text{(III, 2)}}{\frac{\sin BC}{\sin BD}} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC}\text{[1])}$$

Da nun $90^0 > PD > PC$, so erhält man

$$\frac{\sin AB}{\sin BE} > \frac{\sin BC}{\sin BD}$$

und analog:

$$\frac{\sin BE}{\sin BK} > \frac{\sin BD}{\sin BT}$$

und:

$$\frac{\sin BK}{\sin BH} < \frac{\sin BT}{\sin BZ}.$$

Daraus folgt eine andere Reihe von Ungleichheiten, und zwar diese:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin AE}{\sin AH} &> \frac{\sin CD}{\sin CZ} \\ \frac{\sin AH}{\sin AK} &> \frac{\sin CZ}{\sin CT} \\ \frac{\sin AK}{\sin EK} &> \frac{\sin CT}{\sin DT} \\ \frac{\sin EK}{\sin HK} &> \frac{\sin DT}{\sin ZT} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und daraus folgert Menelaos gleich[2]) die Ungleichheit

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT} \quad \text{q. e. d.}$$

III, 13 bezieht sich auf die Vergleichung von Obliquascensions- und Rektascensionsdifferenzen für Orte der Polarzonen und für alle Teile des Tierkreises. Zum Beweis gehören nämlich 2 Figuren (19 und 20), in welchen BU als der Horizont, BA als der Äquator, BV als die Ekliptik (in Figur 19 ist BV der Kvadrant Jungfrau-Krebs, in 20 Widder-Zwillinge), VV als der Wendekreis, P als der Nordpol aufzufassen ist, während CA, DE, ZH und NL verschiedene Lagen des Horizontes sind. In beiden Fällen ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}.$$

1) III, 2 giebt ja: $\frac{\sin AC}{\sin DE} = \frac{\sin BC}{\sin BD}$, d. h. Grundformel I (vgl. Seite 13) für Dreieck ADE, vorausgesetzt, daſs $BC = BA = 90^0$, die verwendbar ist zur Berechnung der Deklination eines Ekliptikpunkts durch Länge und Neigung.

2) Menelaos schlieſst wahrscheinlich so: Multiplizieren wir die linken sowie die rechten Seiten der Ungleichheiten (1), so erhalten wir $\frac{\sin AE}{\sin HK} > \frac{\sin CD}{\sin ZT}$ und daraus, wegen der gegebenen Voraussetzung, $\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}$.

III, 4 giebt:

$$\frac{\sin AT}{\sin BT} = \frac{\sin EJ}{\sin BJ} = \frac{\sin HK}{\sin BK}.$$

Wenn nun $TJ = JK$, so wird $AE > EH$; denn dann ist $BT \div BJ = BJ \div BK$; daraus folgt aber, da $AT > BT$ und $EJ > BJ$ und $HK > BK$, dafs

$$AT \div EJ > EJ \div HK,$$

d. h.

(Figur 19)

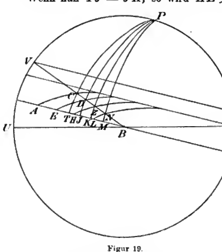
$$AE \div TJ > EH \div JK,$$

(Figur 20)

$$AE + TJ > EH + JK,$$

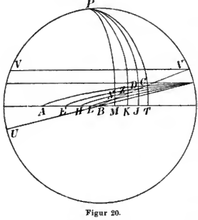
d. h. in beiden Figuren: $AE > EH$ q. e. d.

Analog erhalten wir, wenn $AE = EH$, dafs dann $TJ < JK$, und in allen Fällen haben wir also: $\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}$.



Figur 19.

Anm. Da wegen III,12 $\frac{TJ}{JK} > \frac{CD}{DZ}$, so wird also auch $\frac{AE}{EH} > \frac{CD}{DZ}$, durch welche Ungleichheit die Obliquascensionen und die entsprechenden Längen verglichen werden.



Figur 20.

III, 14 bezieht sich auf Vergleichung von Obliquascensionen für verschiedene Orte. Es werden nämlich verglichen: 1) Die Obliquascensionen für zwei Orte der Polarzonen (Figur 21 links), 2) Die Obliquascensionen für zwei Orte aufserhalb der Polarzonen (Figur 21 rechts). Der Satz ist wie gewöhnlich als Dreieckstheorem formuliert[1]) (diesmal in Bezug auf das Dreieck ABC), ist aber offenbar von einem astronomischen abgeleitet, da BA als der Äquator, BC als die Ekliptik auf-

1) Es wird sogar speziell bewiesen, wie es sich verhält, wenn $\angle B = 90°$, ein Fall, der offenbar von der Astronomie nicht abgeleitet sein kann.

zufassen ist. CA, EH und ZT sind verschiedene Lagen des Horizontes für eine Polhöhe, CD, EK und ZL für eine andere.

1. (Figur 21 links.)

Gegeben ist:

$$90^0 \geqq CA > CD \geqq CB, \qquad \angle A = H = T \quad \text{und} \quad \angle D = K = L.$$

Zu beweisen ist dann:

$$\frac{AH}{HT} > \frac{DK}{KL}.$$

Beweis: III, 4 giebt, wenn CM, EN und ZS senkrecht auf BA stehen:

$$\frac{\sin AM}{\sin BM} = \frac{\sin HN}{\sin BN} = \frac{\sin TS}{\sin BS} \tag{1}$$

und:

$$\frac{\sin DM}{\sin BM} = \frac{\sin KN}{\sin BN} = \frac{\sin LS}{\sin BS}, \tag{2}$$

und daraus folgt, da $90^0 \geqq AM > DM \geqq BM$, dafs:

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} > \frac{BD \div BK}{BK \div BL},$$

d. h. $\quad \dfrac{AH}{HT} > \dfrac{DK}{KL} \quad$ q. e. d.

2. (Figur 21 rechts.)

Gegeben ist: $90^0 \geqq CB > CD > CA$, $90^0 < \angle CAB = EHB = ZTB$, $90^0 < \angle CDB = EKB = ZLB$.

Zu beweisen ist: $\dfrac{AH}{HT} < \dfrac{DK}{KL}$.

Beweis: III, 4 giebt wieder die obigen Gleichungen (1) und (2); da aber diesmal $90^0 \geqq BM > BA > BD$, so wird

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} < \frac{BD \div BK}{BK \div BL}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{AH}{HT} < \frac{DK}{KL} \quad \text{q. e. d.}$$

Figur 21.

Es ist deutlich, dafs alle die Beweise der Sätze III, 11—14 auf Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene beruhen. Diese Voraussetzungen sind, insoweit ich sie nach den mir bis jetzt vorliegenden Menelaostexten feststellen kann, folgende:

Wenn wir auf einem Kreise zwei Reihen von Bogengröfsen haben, wie

$$90^0 \geqq a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

und

$$90^0 > b_1 > b_2 > b_3 > b_4,$$

und zwar so, dafs immer

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \quad a_3 > b_3, \quad a_4 > b_4,$$

so lassen sich aus folgenden Sinusverhältnissen folgende Ungleichheiten von Bogengröfsen beweisen:

1. Wenn

$$\sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 : \sin a_4 = \sin b_1 : \sin b_2 : \sin b_3 : \sin b_4,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 11 und 13).

Anm. Eigentlich schliefst Menelaos nicht direkt so, sondern auf folgende Weise:

Wenn unter den gegebenen Voraussetzungen $a_1 \div a_2 = a_3 \div a_4$, so folgt $b_1 \div b_2 < b_3 \div b_4$, wenn aber $b_1 \div b_2 = b_3 \div b_4$, so folgt $a_1 \div a_2 > a_3 \div a_4$, und dann allgemein („*omnino*"):

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4};$$

auch in den übrigen Fällen ist die Schlufsreihe dieselbe.

2. Wenn

$$\frac{\sin(a_1 + b_1)}{\sin(a_1 \div b_1)} = \frac{\sin(a_2 + b_2)}{\sin(a_2 \div b_2)} = \frac{\sin(a_3 + b_3)}{\sin(a_3 \div b_3)} = \frac{\sin(a_4 + b_4)}{\sin(a_4 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[1]).

3. Wenn

$$\frac{\sin(a_1 \div a_2)}{\sin(a_3 \div a_4)} < \frac{\sin(b_1 \div b_2)}{\sin(b_3 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[2]).

Haben wir ferner auf demselben Kreise drei Reihen von Bogengröfsen, wie:

$$a_1 > a_2 > a_3,$$
$$b_1 > b_2 > b_3$$

und

$$90^0 > c_1 > c_2 > c_3,$$

und wenn:

$$\sin(a_1 \div c_1) : \sin(a_2 \div c_2) : \sin(a_3 \div c_3)$$
$$= \sin(b_1 \div c_1) : \sin(b_2 \div c_2) : \sin(b_3 \div c_3) = \sin c_1 : \sin c_2 : \sin c_3,$$

so wird, wenn:

$$a_1 > b_1 > 2c_1,$$
$$a_2 > b_2 > 2c_2$$

und

$$a_3 > b_3 > 2c_3,$$

auch

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} > \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[1]).

Wenn dagegen:

$$b_1 < a_1 < c_1,$$
$$b_2 < a_2 < c_2$$

und

$$b_3 < a_3 < c_3,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} < \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[2]).

Halley, der bei seiner Ausgabe diese Voraussetzungen offenbar genau geprüft hat, giebt als Lemmata, die zum Verständnis dieses Teils der *Sphärik* nützlich sind, folgende an:

1. Wenn $a > b$, so wird $\frac{a}{b} > \frac{\sin a}{\sin b}$.

Dieser Satz wird in Menelaos III, 15 (vgl. unten Seite 48 und 50) mehrmals vorausgesetzt; auch findet er sich in Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 10 (ed. Halma I, p. 34—35; ed. Heiberg I, p. 43—44)[1]); der Satz wird hier zu der annähernden Berechnung von crd. 1^0 verwendet. Diese Anwendung bildet den Abschlufs von Ptolemaios' Einleitung zur Sehnentafel; in seinen gleich folgenden Worten: „ἡ μὲν οὖν πραγματεία τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν οὕτως ἂν οἶμαι ῥᾷστα μεταχειρισθείη" finde ich eine Andeutung davon, dafs dieser und ähnliche Sätze auch *vor* Ptolemaios zur Berechnung von Sehnentafeln gebraucht wurden, und dafs die älteren Methoden umständlicher als seine waren.

2. Die einfache Erweiterung von 1, nämlich: wenn $a > b > c \cdots$, so wird $\frac{a}{\sin a} > \frac{b}{\sin b} > \frac{c}{\sin c} \cdots$,

die Halley auch anführt, finde ich nicht unter den Voraussetzungen im Menelaos.

---

1) Der Satz wird schon von Aristarch von Samos (c. 270 v. Chr.) verwendet; vgl. περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης, ed. Wallis, 1699.

3. Halley giebt ferner an:

Wenn $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin d}$ und $\sin a > \sin b > \sin c > \sin d$, so wird

$$\frac{a \div b}{c \div d} > \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{\sin (a \div b)}{\sin (c \div d)}.$$

Auch diese Ungleichheiten finden wir nicht im Menelaos direkt angewandt.

Es ist möglich, dafs alle die von Menelaos aus der Trigonometrie der Ebene vorausgesetzten Sätze sich auf solche einzelnen zurückführen lassen. Ein Versuch, eine solche Zurückführung durchzuführen, hat aber znnächst geringeren Wert, und läfst sich erst zu Ende bringen, wenn die Menelaostexte (der lateinische und die arabischen) miteinander verglichen sind, so dafs es möglichst sicher festgestellt ist, in welcher *Form* die Voraussetzungen im Menelaos gegeben sind. Bis dahin müssen wir uns mit den obigen Angaben begnügen.

Eine Frage erhebt sich jedoch hier: Finden wir nicht in der Litteratur vor Menelaos ähnliche Sätze, wo Bogenlängen und Geraden mit einander verglichen werden?

Aufser dem wichtigen Satz des Theodosios (III, 11), der, wie wir unten sehen werden, dem Apollonios beigelegt wird[1]), treffen wir von Sätzen dieser Art nur diejenigen, auf denen die Methoden von Aristarch und Archimedes[2]) beruhen. Es sind dies aber aufser dem auf der vorhergehenden Seite referierten nur zwei sehr alte Sätze, die in der griechischen Geometrie eine überaus reiche Anwendung gefunden haben, und deren einer auch in Theodosios III, 11 gebraucht wurde.

Dieser Satz sagt: Wenn die zwei an B und B_1 rechtwinkligen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Katheten AB und A_1B_1 gleich, die Katheten BC B_1C_1 dagegen ungleich haben, und zwar $B_1C_1 > BC$, so wird

$$\frac{B_1C_1}{BC} > \frac{\angle C}{\angle C_1}.$$

Dieser Satz, der dem unsrigen

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} > \frac{y}{x} \quad \left(\text{für } 90^0 > y > x\right)$$

gleichkommt, wird von Hultsch als sehr alt betrachtet. Er hat ihn näm-

1) Vgl. unten Seite 47—49.

2) Archimedes, κύκλου μέτρησις, ed. Heiberg, p. 258—270.

ich unter den *„Lemmata zur Sphärik"*[1]) gefunden und setzt ihn deswegen vor Antolykos. Obwohl ich nicht mit Hultsch diese Lemmata als voreuklidische betrachten kann, gebe ich doch zu, dafs der hier erwähnte Satz alt ist; denn er wird von Archimedes[2]) als bekannt vorausgesetzt, wie schon Hultsch bemerkt hat. Man hat aber, glaube ich, übersehen, dafs der Satz in Euklids *Optik*[3]) bewiesen (*nicht* vorausgesetzt) wird. Der andere Satz ist der Seite 43 referierte:

$$\frac{y}{x} > \frac{\sin y}{\sin x} \left(\text{für } 90^0 > y > x\right),$$

den wir schon bei Aristarch treffen, jedoch ohne Beweis. In der *Syntaxis* findet sich aber dieser Beweis (vgl. Seite 13 und 43).

Die hier referierten Sätze, die in der ältesten Zeit die Trigonometrie ersetzten, lieferten vielleicht brauchbare Hülfsmittel bei den ersten Versuchen, sich eine trigonometrische Methode zu verschaffen, sind aber zn alt, dafs man zur Zeit ihrer Erfindung Werke wie das, welchem Menelaos die obigen Voraussetzungen entnommen hat, gehabt haben kann. Ich glaube deswegen, dafs *wir in Menelaos' Sphärik die frühesten Spuren eines plantrigonometrischen Werkes treffen,* und dafs dieses Werk, wie oben gesagt, das von Theon erwähnte ist.

Menelaos III, 15, der letzte Satz in der *Sphärik* ist in vier Teile geteilt. In Nasr-Mansurs Redaktion sind diese als III, 22—25 numeriert. Wir folgen Gerhard, dessen Übersetzung mit der Halleyausgabe übereinstimmt, und bezeichnen die Teile als III, 15^{1-4}.

III, 15^1 sagt: *Gegeben zwei gröfste Kreisquadranten BA und BC. Vom Pol P des Kreises BA sind zwei gröfste Kreisbogen gezogen, die von*

1) Neue Jahrbücher 1883, p. 415—420. Dafs dieses Werk mit demjenigen, welchem Menelaos seine plantrigonometrischen Voraussetzungen entnommen hat, identisch ist, möchte ich bezweifeln. Die Fragmente aus den *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, die Hultsch gefunden hat, beziehen sich nämlich, wie Heiberg nachgewiesen hat (vgl. Heiberg, *Jahresberichte,* Philologus 43, p. 496—497), alle auf Theodosios' *Sphärik.* Mit den *„σφαιρικά"* meinen die griechischen Autoren auch die des Theodosios oder die alten voreuklidischen, kaum aber die des Menelaos. Endlich, wenn diese *λήμματα*, wie Hultsch vermutet, vor Antolykos existierten, ist es ausgeschlossen, dafs sie eine schon entwickelte Trigonómetrie der Ebene enthielten; wenn sie auf der anderen Seite neueren Datums sind, was ich wegen des hier erwähnten Lemmas zu Theodosios III, 11, welcher Satz kaum älter als Apollonios ist, vermute (vgl. unten Seite 48), so mufs man sie zunächst als eine zur Zeit eines Pappos zu Schulzwecken verfafste Sammlung betrachten; in keinem Falle haben diese *λήμματα* dann irgend etwas mit den Voraussetzungen des Menelaos zu thun.

2) Archimedes, ed. Heiberg II, p. 260 (d. h. *ψαμμίτης* I, 21).

3) Euclidis *opera,* ed. Heiberg VII, p. 14 (d. h. *Optik* Satz 8).

BA und BC bezw. in A_1, A_3 und C_1, C_3 geschnitten werden. Den Kugeldurchmesser nennen wir $2r$, die Durchmesser der mit BA parallelen Kreise durch C, C_1 und C_3 nennen wir bezw. 2ϱ, $2r_1$ und $2r_3$. Dann ist zu beweisen, dafs (Figur 22)

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3}. \tag{1}$$

Beweis:

Da $\angle PCB = PA_3B = 90^0$ und $\angle CC_3P = BC_3A_3$, so wird, wenn III, 2 auf $\triangle PCC_3$ und $\triangle BA_3C_3$ angewandt wird:

$$\frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3}. \tag{2}$$

III, 1 ($\triangle BC_1A_1$ durch PC_3A_3 geschnitten) giebt aber:

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3} \tag{3}$$

$$= \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3},\text{[1]}$$

also auch

$$\frac{\sin A_3 A_1}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} \quad \text{q. e. d.}$$

Bei diesem Beweise ist zuerst die Hauptgleichung (1) beachtenswert, weil sie für die Berechnung gewisser astronomischen Tafeln sehr geeignet ist.

Fassen wir z. B. BC als die Ekliptik, BA als den Äquator auf, so wird man mit (1) die den Längen BC_3, C_3C_1 u. s. w. entsprechenden Rektascensionen BA_3, A_3A_1 u. s. w. leicht berechnen können. Die Rektascensionstafel in Ptolemaios' *Syntaxis*[2]), wo die jedem Ekliptikbogen von 10^0 zngeordnete Rektascension durch Menelaos' Satz auf ziemlich schwerfällige Weise berechnet wird, läfst sich mit Hülfe von III, 15^1 so herleiten:

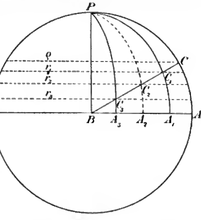
(1) giebt: $\sin A_1 A_3 = r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3}$.

$r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3$ ist aber konstant, da $C_1 C_3$ immer gleich 10^0 bleibt, r_1 und r_3 sind die Sinnsse zu den Zenithdistanzen PC_1 und PC_3, d. h. die

1) Wie ich immer *Sinus* statt *Sehne des doppelten Bogens* geschrieben habe, so werde ich auch *Halbmesser* statt *Durchmesser* schreiben, obwohl Menelaos immer in diesen und den folgenden Beweisen *Durchmesser* sagt. Da er fast immer mit Verhältnissen operiert, so macht es in der That keinen Unterschied, und ich ziehe der Übersichtlichkeit wegen die dem modernen Leser zunächstliegende Schreibweise vor.

2) Die Rektascensionstafel steht in der *Syntaxis* II, cap. 8, ed. Heiberg I, p. 134—135; ed. Halma I, p. 103. Die Berechnungsbeispiele zu derselben sind schon in I, cap. 16 (Halma I, cap. 13) erledigt, ed. Heiberg I, p. 82—85; ed. Halma I, p. 60—63.

Cosinusse zu den Deklinationen $A_1 C_1$ und $A_3 C_3$, die man in der Deklinationstafel findet, und zwar braucht man für jede Rechnung nur einmal nachzuschlagen. Wir werden kaum zu viel wagen mit der Behauptung, dafs wir in (1) eine wenigstens von Menelaos angewandte Berechnungsformel[1]) vor uns haben. Die Formel kann aber von einer älteren Zeit herstammen, obwohl wir annehmen müssen, dafs der im Beweise angewandte Satz III, 2 von Menelaos erfunden ist; denn die Anwendung von III, 2 läfst sich durch zweimalige Anwendung von III, 1 ersetzen, und zwar indem (Figur 22) $\triangle ABC$ durch $PC_3 A_3$ und $\triangle BA_3 C_3$ durch PCA geschnitten werden, woraus die Relation (2) folgt.



Figur 22.

Eigentümlich ist es, dafs Menelaos in III, 15 die Parallelkreisdurchmesser als trigonometrische Funktion verwendet. Auch in Theodosios III, 11—12 werden die Durchmesser zur Vergleichung von Bogenlängen und Geraden eingeführt. Bemerkenswert ist deshalb folgender Passus, den Menelaos[2]) gleich nach dem Beweis der Formel (1) folgen läfst.

„Et iam declaratur ex eo quod diximus in figuris primis[3]) *ex figuris tractatus tertii libri Theodosii in speris per modum alium. Ipse enim declaravit ibi, quod proportio arcus gh* (bei uns $A_1 A_3$) *ad arcum* $\overline{de}$ ($C_1 C_3$) *est minor proportione diametri spere* ($2r$) *ad diametrum circuli* (2ϱ), *qui contingit circulum* $\overline{bc}$ *super punctum* $\bar{c}$", d. h. $\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3} < \frac{2r}{2\varrho}$. In Theodosios III, 11 wird allerdings nur der Spezialfall $\frac{\smile AA_3}{\smile CC_3} < \frac{2r}{2\varrho}$ bewiesen. Dieser Unterschied will jedoch wenig besagen, denn Menelaos weist jedenfalls auf Theodosios III, 11 hin.

1) Vielleicht hat Menelaos eine Formel wie diese (1) in seiner von Pappos erwähnten Abhandlung über die Auf- und Untergänge der Tierkreiszeichen benutzt; vgl. Seite 3.

2) Ich gebe die Stelle nach Gerhards Übersetzung. Der Passus stand auch in der hebräischen Übersetzung des Jacob ben Machir; vgl. die Halley-ausgabe, p. 108—109.

3) Die Worte *„in figuris primis"* beruhen wahrscheinlich auf einem Mifsverständnis von Gerhard. Bei Halley steht *„Propositio principalis"*, was offenbar das Richtige ist.

Menelaos fährt fort: *„et hec est res, qua usus est Apollonius in libro, qui dicitur* **liber aggregativus**[1]*), et nos iam usi sumus hoc hic, et indiguimus eo necessitate maioris iuvamenti; et nos ostendimus illud in eo, quod erit post, cum demonstratione communi"*.

Die Hinweisung auf Theodosios findet sich auch im Cod. Leid. 930 (Nasr-Mansurs Redaktion), die Anspielung auf Apollonios, der Theodosios III, 11 in einem *„liber aggregativus"* (?) soll *verwendet haben* (wozu?), dagegen nicht. Bis mehrere arabische Handschriften untersucht worden sind, müssen wir deswegen die Echtheit dieses Passus sowie die Erklärung des Buchtitels *„liber aggregativus"* dahingestellt sein lassen.[2])

Es wird sich wohl zuletzt ergehen, dafs die ersten Elemente der Trigonometrie, wie Tannery[3]) vermutet, sich auf Apollonios als Erfinder zurückführen lassen.

Was wir aber kaum hezweifeln können, ist, dafs der Schlufs von Menelaos' *Sphärik* III, 15^{1-4}, der in der That einen von den vorhergehenden Sätzen deutlich abweichenden Charakter hat, eine Neubehandlung und Vervollkommnung von älteren primitiveren Methoden enthält. Vergleichen wir Theodosios III, 11—12 und Menelaos III, 15^{1-4}, so scheint aus dieser Vergleichung hervorzugehen, *dafs der Kugel- und die Parallelkreisdurchmesser die ältesten Mittel zum Vergleich von Bogenlängen mit Geraden lieferten, d. h. dafs sie gewissermafsen als die ältesten trigonometrischen Funktionen zu betrachten sind.*

Wenn das richtig ist, *so entstand die Trigonometrie aus den Betrach-*

---

1) Bei Halley, p. 108, heifst dieser Titel (ans dem Hebräischen) übersetzt: *„Liber* (forte) *de principiis universalibus"*. Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482, meint, dafs das betreffende hebräische Wort eine allgemeine Bedeutung hat, wie *„umfassende"* oder dergleichen.

2) Ich vermute, dafs die Stelle wirklich in Menelaos' *Sphärik* stand. Wenn sie aber auch eine arabische Interpolation ist, so hat der betreffende Araber wohl authentische Berichte vor sich gehabt. — Der Titel *„liber aggregativus"* liefse sich wohl als eine Übersetzung von „ἡ καθόλου πραγματεία" erklären; vgl. Marinos' *Kommentar zu Euklids Data*, ed. Menge, p. 234; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 133. — Wir erinnern auch an das von Eutokios dem Apollonios zugeschriebene Werk mit dem rätselhaften Titel „ὠκυτόκιον", wo eine Berechnung von π erledigt werden soll; vgl. Archimedes, ed. Heiberg III, p. 300; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 124 ff. Die Fragmente dieser Werke, die man (Tannery und Heiberg) im Pappos zu finden geglaubt hat, lassen sich jedoch kaum mit der Stelle im Menelaos in Übereinstimmung bringen. — Die Hinweisungen auf ein astronomisches Werk des Apollonios, vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Halma II, p. 312 ff., dessen Titel nicht angeführt wird, verbreiten auch über die Erklärung der Menelaosstelle kein Licht.

3) Vgl. Tannery, *l'astr. anc.* p. 68.

tungen, wozu die sphärisch-astronomischen Figuren Anlafs gaben), und später, da man die Berechnung von den Durchmessern an einen Kreis in der Ebene anknüpfte, gingen die Durchmesser naturgemäfs in Kreissehnen über.

Noch eins können wir in Bezug auf den Beweis III, 15^1 bemerken:

In der obigen Gleichung (2): $\frac{\sin PC}{\sin PC_2} = \frac{\sin BA_2}{\sin BC_2}$ liegt implicite eine Dreiecksformel, die von den Arabern oft zu Berechnung verwendet wurde, nämlich für das Dreieck BA_3C_3 mit den Seiten b_3, a_3, c_3 die Formel:

$$\frac{\cos B}{\cos b_2} = \frac{\sin c_2}{\sin a_2}.$$

Nach v. Braunmühls[1]) Angabe ist Ibn-Junos († 1008) der erste, der diese Formel gebrauchte.

Menelaos III, 15^2 (Figur 22):

Ziehen wir den gröfsten Kreisbogen PC_2A_2, so dafs

$$\sin^2 PC_2 = \sin PA_2 \cdot \sin PC \tag{1}$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, dafs

$$r_2^2 = r \cdot \varrho,$$

so kann man beweisen, dafs $\smile BC_2 \div BA_2$ *ein Maximum* oder, wie Menelaos sagt, *dafs diese Differenz eine gegebene Gröfse ist, und zwar gröfser als die Differenz irgend zweier anderen ähnlich liegenden Bogen*, d. h.

$$BC_2 \div BA_2 > BC_3 \div BA_3$$

und

$$BC_2 \div BA_2 > BC_1 \div BA_1.$$

Beweis:

$$\frac{\sin PA_2}{\sin PC_2} = \frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} \quad (\text{III, } 2)^2) \tag{2}$$

$$\frac{\sin PC_2}{\sin PC} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2} \quad (\text{III, } 2) \tag{3}$$

Wegen (1) werden (2) und (3) gleich, d. h.

$$\frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2}, \tag{4}$$

---

1) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 62.

2) Die Gleichung (2) kommt der Grundformel III (vgl. Seite 13) gleich, und zwar für Dreieck BA_2C_2, und ist leichter zu benutzen als Menelaos' Satz bei der Bestimmung des Horizontbogens (zwischen dem Äquator und dem Wendekreis) durch die Neigung der Ekliptik und die Dauer des längsten Tages (*Syntaxis* II, cap. 2, ed. Heiberg I, p. 89 ff.).

folglich wird, da $\smile BA = BC = 90^0$, auch

$$\smile CC_2 = BA_2 \text{ und } AA_2 = BC_2.$$ [1]

Ferner bekommen wir durch (1):

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin^2 PA_2}{\sin^2 PC_2} = \frac{\sin^2 AA_2}{\sin^2 CC_2},$$

d. h. $$\frac{r+\varrho}{r-\varrho} = \frac{r^2}{\sin^2 AA_2 \dot{-} \sin^2 CC_2}, \text{ weil } \sin^2 CC_2 + \sin^2 AA_2 = r^2.$$ [2]

Indem nun r und ϱ „gegeben" sind, ist auch $\sin^2 AA_2 \dot{-} \sin^2 CC_2$ „gegeben". Daraus schliefsen wir, dafs $\sin AA_2$ und $\sin CC_2$, ferner AA_2 und CC_2 „gegeben" sind; d. h. die Bogendifferenz $AA_2 \dot{-} CC_2 = BC_2 : BA_2$ *ist eine durch r und ϱ gegebene Gröfse* q. e. d.

Nun geben aber III, 15[1] und die gegebene Gleichung (1):

$$\frac{\sin A_1 A_2}{\sin C_1 C_2} = \frac{\sin PA \cdot \sin PC}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin^2 PC_2}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin PC_2}{\sin PC_1},$$

und da $PC_2 > PC_1$, so wird $A_1 A_2 > C_1 C_2$; analog wird bewiesen, dafs $A_3 A_2 < C_3 C_2$, und es folgt also:

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_1 \dot{-} BA_1$$

und

$$BC_2 \dot{-} BA_2 > BC_3 \dot{-} BA_3,$$

d. h. $\smile BC_2 \dot{-} BA_2$ *ist ein Maximum*, da $PC_1 A_1$ und $PC_3 A_3$ ganz willkürlich gezogen sind q. e. d.

Auch dieses Theorem kann als ein astronomisches aufgefafst werden und giebt dann an, zu welcher Zeit die Differenz zwischen Sonnenlänge und Sonnenrektascension am gröfsten ist. Man fällt aber kaum auf diese Grenzbestimmung, ohne zuvor die Rektascensionen berechnet zu haben. Hat man aber einmal eine Tafel wie die Rektascensionstafel in der *Syntaxis* berechnet, so liegt die Erfindung dieses Satzes ganz nahe.

Bemerkenswert bei diesem Beweise ist ferner, dafs wir hier eine trigonometrische Bestimmung finden, deren Berechnung nicht durchgeführt wird, indem nur die Möglichkeit einer solchen angegeben wird durch die Bemerkung, dafs die betreffende Gröfse „gegeben" ist.

Es erinnert uns dies an die trigonometrische Bestimmungsweise in Ptolemaios' *Analemma*.[3]) Da die Angaben hier im Menelaos deutlicher sind,

1) Die Gleichung $\frac{\text{crd.}\,2x}{\text{crd.}\,2y} = \frac{\text{crd.}(180^0 \dot{-} 2y)}{\text{crd.}(180^0 \dot{-} 2x)}$ (4) läfst nämlich, wie leicht geometrisch zu zeigen ist, nur die Möglichkeiten $x = y$ oder $x = 90^0 \dot{-} y$ zu; $x = y$ (d. h. $AA_2 = CC_2$) ist aber in diesem Falle unmöglich. Im Folgenden (vgl. Seite 53, Note 1) findet sich als Voraussetzung aus der Trigonometrie der Ebene eine Verallgemeinerung dieses Satzes.

2) Es ist dies die Grundformel 2 (siehe Seite 13): $\sin^2 x + \sin^2(90^0 \dot{-} x) = 1$.

3) Vgl. oben Seite 14.

bestätigen sie indessen die Richtigkeit von Zeuthens Auffassung der Analemmakonstruktionen.

Eine weitere Bestätigung davon, dafs das Wort *δεδομένον* (datum), dessen Bedeutung ursprünglich zunächst *„konstruierbar“* war, später die Bedeutung *„numerisch berechenbar“*, ja sogar wie hier *„annäherungsweise berechenbar“* erhielt, finden wir in Marinos' *Kommentar zu Euklids Data* (ed. Menge p. 234). Bei einer Erörterung der verschiedenen Bedeutungen des Wortes *δεδομένον* sagt Marinos nämlich: „... *οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· οὕτω γὰρ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον ἤτοι πρὸς ἀκρίβειαν ἢ τὸ σύνεγγυς.*“

Die Zeit des hier erwähnten Diodoros konnen wir nicht; wir wissen nur, dafs er wie Ptolemaios ein *Analemma* verfafste.[1]) *Die* Bedeutung des Wortes *δεδομένον*, an die Marinos hier erinnert, scheint also durchaus mit den Analemmakonstruktionen in Verbindung zu stehen.

Menelaos III, 15$^{3-4}$ bildet den Schlufs des dritten Buches. Es wird hier das genauer erörtert, was Theodosios nur teilweise bewiesen hat, nämlich dafs das Verhältnis $\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3}$ (Figur 22—23) zwischen zwei bestimmten Grenzen liegt, indem

$$\left.\begin{array}{lr}
1)\ \text{für } A_1 A_3 > C_1 C_3, & \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{r_1} \\
2)\ \text{für } A_1 A_3 < C_1 C_3, & \frac{\varrho}{r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} \\
\left.\begin{array}{l}3)\ \text{für } BC_1 = 90^0, \text{ d. h. } C_1 \text{ fällt in } C, \\ 4)\ \text{für } BC_1 \div 90^0 = 90^0 \div BC_3, \text{ d. h.} \\ \quad C \text{ in der Mitte von } C_1 C_3,\end{array}\right\} & \frac{r}{r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{\varrho} \\
\begin{array}{l}5)\ \text{für } BC_1 \div 90^0 \gtrless 90^0 \div BC_3, \text{ d. h. } C \\ \quad \text{zwischen } C_1 \text{ und } C_3, \text{ nur nicht in der} \\ \quad \text{Mitte},\end{array} & \frac{r}{r_1} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{\varrho}
\end{array}\right\} \quad (A)$$

Von Interesse ist lediglich der Beweis, dafs $\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3} > \frac{\varrho}{r_3}$, wenn $\smile A_1 A_3 < C_1 C_3$.

Beweis: Man zieht (Figur 23) die gröfsten Kreisbogen PC_4A_4 und PC_5A_5, so dafs C_4 zwischen C_3 und C_2 fällt, und so[2]), dafs

---

1) Vgl. Pappos, ed. Hultsch III, Praefatio, p. IX—XI.

2) Menelaos drückt sich an dieser Stelle undeutlich aus, was dem Abu-Nasr-Mansur zu einer berechtigten Kritik Anlafs giebt.

$$r \cdot \varrho = r_2^2 = r_3 \cdot r_5 = r_1 \cdot r_4, \tag{1}$$

d. h. $\sin PA \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_3 \cdot \sin PC_5 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_4$.

Dann wird $\smile A_1A_4 = C_1C_4$ und $\smile A_3A_5 = C_3C_5$ [direkte Folge von (1) und III, 15¹, wonach

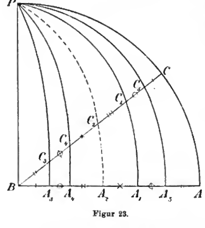
$$\frac{\sin A_1A_4}{\sin C_1C_4} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_4} \quad \text{und} \quad \frac{\sin A_3A_5}{\sin C_3C_5} = \frac{r \cdot \varrho}{r_3 \cdot r_5}\Big].$$

„Nun wird“, sagt Menelaos[1]): *„infolge des einschlägigen Beweises in geraden Linien“* entweder $\smile C_3C_4 = A_1A_5$ oder $\smile C_3C_4 = A_3A_4$; da aber $\smile C_3C_4 > A_3A_4$, so mufs $\smile C_3C_4 = A_1A_5$ sein, und daraus folgt, dafs

$$\smile C_1C_5 = A_3A_4,$$
$$\smile C_5C_4 = A_3A_1$$

und

$$\smile C_1C_3 = A_5A_4.$$



Figur 23.

Schliefslich bekommen wir:

$$\frac{\smile C_1C_3}{\smile A_1A_5} = \frac{\smile A_5A_4}{\smile C_5C_4} < \frac{r}{r_5} = \frac{r_3}{\varrho}$$

[vgl. (A)[1])], d. h.

$$\frac{\smile A_1A_5}{\smile C_1C_5} > \frac{\varrho}{r_3} \qquad \text{q. e. d.}$$

Wie der in diesem Beweis angewandte plantrigonometrische Satz formuliert war, ist nicht unmittelbar einleuchtend. Dafs jedoch die Schlufsreihe richtig ist, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Wir haben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin C_3C_4}{\sin A_3A_4} &= \frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho}\\ \frac{\sin A_1A_5}{\sin C_1C_5} &= \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5}\end{aligned}\right\} \quad \text{(III, 15}^1\text{)};$$

da aber $\frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5}$, so wird $\frac{\sin C_3C_4}{\sin A_3A_4} = \frac{\sin A_1A_5}{\sin C_1C_5}$, oder wie Menelaos sagt: $\frac{\text{crd. } 2\,C_3C_4}{\text{crd. } 2\,A_3A_4} = \frac{\text{crd. } 2\,A_1A_5}{\text{crd. } 2\,C_1C_5}$ $(= \mu)$; aufserdem wissen wir, dafs

1) Bei Gerhard lautet diese Stelle so: *„Et propterea quod hec forma est sicut ipsa est, declaratur* ***in lineis rectis****, quod arcus* $\overline{le}$ (C_3C_4) *est equalis uno duorum arcuum* $\overline{gm}$, $\overline{nh}$ $(A_1A_5,\ A_3A_4)$. *Verum ipse est maior arcu* $\overline{nh}$ (A_3A_4), *ergo argus el* (C_3C_4) *est equalis arcui* $\overline{gm}$ (A_1A_5) *....“*

$2\,C_3C_4 + 2\,C_1C_5 = 2\,A_3A_4 + 2\,A_1A_5\ (= k^0)$, und es läfst sich nun graphisch[1]) nachweisen, dafs entweder

$$\smile C_3C_4 = A_3A_4$$

oder

$$\smile C_3C_4 = A_1A_5;$$

$\smile C_3C_4$ ist aber gröfser als A_3A_4; denn:

$$\frac{\sin A_3A_4}{\sin C_3C_4} = \frac{r\cdot\varrho}{r_3\cdot r_4} \quad (\text{III}, 15^1);$$

hier ist aber $r\cdot\varrho = r_1\cdot r_4 < r_3\cdot r_4$ [vgl. (1)], denn $r_1 < r_3$, also $\smile C_3C_4 > A_3A_4$ [2]), womit die Schlufsreihe in Menelaos' Beweis hergestellt ist.

---

1) Dafs der Beweis graphisch war, sagt Menelaos selbst (siehe die vorige Note: *„in lineis rectis"*). Ein solcher Beweis kann auf vielfache Art geführt werden. Es handelt sich ja darum, auf der Basis (MN) eines gegebenen Abschnittes (von k^0) zwei in demselben eingeschriebene Dreiecke zu zeichnen, so dafs deren Schenkel proportional sind (Figur 24) im Verhältnisse μ. Der Ort der Dreiecksscheitel wird zwei gleiche Kreise (PR und $P'R'$) [vgl. Apollonios, ed. Heiberg II, p. 181 ff., und oben Seite 35 und Note 1 daselbst]; die Scheitel müssen also in O oder O' liegen, d. h. die Dreiecke werden kongruent q. e. d. Dieser Beweis gleicht dem unsrigen, nämlich dafs $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(c \div y)}{\sin(c \div x)}$, für $90^0 > c \begin{smallmatrix} > x \\ > y \end{smallmatrix}$, nur von $x = y$ oder $x + y = c$ erfüllt wird. Für $c = 180^0$ wurde der Satz schon oben vorausgesetzt; vgl. Seite 50 Note 1. — Dafs ähnliche Sätze wie der hier referierte in der vorptolemaiischen Trigonometrie öfters vorkommen, zeigt der Umstand, dafs in Menel. III, 7 der Satz: „Wenn $\frac{\text{crd. } 2(k : x)}{\text{crd. } 2x} = \frac{\text{crd. } 2(k \div y)}{\text{crd. } 2y}$, so wird $x = y$", ohne irgend eine Erörterung als bekannt voransgesetzt wird.

Figur 24.

2) Dafs Menelaos ohne irgend eine Erklärung voraussetzt, dafs $\smile C_3C_4 > A_3A_4$, kommt wohl daher, dafs diese Thatsache aus den Rektascensionstafeln allgemein bekannt war. In III, 15^2 hat er ja schon den Punkt der Ekliptik (C_2: Figur 22—23) bestimmt, von wo aus die Längendifferenzen gegen die Wenden hin anfangen kleiner als die zugeordneten Rektascensionsdifferenzen zu werden.

Wir haben die Sätze III, 15^{1-4} so genau erörtert, nicht nur, weil wir in deren Beweisen Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene und, wenn wir uns nicht irren, Überreste der ältesten sphärischen Trigonometrie gefunden haben, sondern auch, weil Maurolycus die Beweise des Menelaos weiter entwickelt und zur Berechnung angewandt hat.

Wie Menelaos setzt Maurolycus[1]):

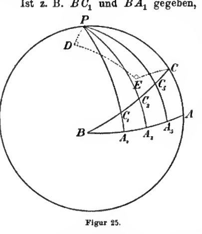
$\sin 90^0 \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_5$ [Menel. III, 15^{3-4}],

folgert daraus $\smile BC_2 + BA_2 = 90^0$ [Menel. III, 15^3], ferner dafs $\smile BC_2 : BA_2$ ein Maximum ist [Menel. III, 15^3], endlich dafs

$$\smile C_1 C_2 = A_2 A_5$$
$$\smile C_2 C_5 = A_1 A_2$$
$$\left.\begin{array}{l} \smile BC_1 = AA_5 \\ \smile BA_1 = CC_5 \end{array}\right\} \text{[Menel. III, } 15^4\text{]},$$

und nun giebt er mit Hülfe von Menelaos III, 2 Berechnungsbeispiele für alle Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, das je nach Bedarf mit einem der Dreiecke BA_1C_1, BA_2C_2 oder BA_5C_5 identifiziert wird.[2])

Ist z. B. BC_1 und BA_1 gegeben, so findet Maurolycus C_1A_1 durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke PCC_1 und PAA_1, was ergiebt:



Figur 25.

$$\frac{\sin PC_1}{\sin PA_1} = \frac{\sin C_1 C}{\sin A_1 A},$$

d. h. $\dfrac{\cos C_1 A_1}{\sin 90^0} = \dfrac{\cos BC_1}{\cos BA_1}$ (Grundformel III), wo BC_1 und BA_1 gegeben sind.

Ganz neu ist wahrscheinlich der Beweis des Maurolycus, dafs

$$\sin B\widehat{C_1}A_1 = \sin \widehat{PC_5},$$
$$\sin B\widehat{C_2}A_2 = \sin \widehat{PC_2}$$

und

$$\sin B\widehat{C_5}A_5 = \sin \widehat{PC_1}.$$

Der Beweis kann durch Menelaos III, 2 geführt werden, denn ziehen wir (Figur 25) mit C_1 als Pol den gröfsten Kreis DE, so bekommen wir:

1) Vgl Bulletino Boncompagni 9 (1876), p. 71 ff.

2) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 152—153. Dafs v. Braunmühl dem Maurolycus diese Konstruktion zuschreibt, kommt daher, dafs letzterer die Sätze III, 15^{2-4} aus seiner Menelaosausgabe ausgeschlossen hat, um sie in einer verbesserten Gestalt in seine eigene *Sphärik* aufzunehmen.

$$\frac{\sin DE}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin BA_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin PC}{\sin PC_1} = \frac{\sin PC_5}{\sin 90^\circ},$$

d. h.

$$\sin PC_5 = \sin DE = \sin B\widehat{C_1}A_1 \quad \text{q. e. d.}$$

Durch diese Neuerung ist es Maurolycus gelungen, Berechnungen zu erledigen, zu welchen wir die zwei Grundformeln V und VI (vgl. Seite 13) gebrauchen, die wir nicht einmal implicite in Menelaos' und Ptolemaios' Werken gefunden haben.

Maurolycus' Anwendung von Menelaos III, 2 und 15 zeigt uns durchaus, daſs diese Sätze auch von Menelaos zu Berechnungen verwendet werden konnten, statt allein zum Beweis von Ungleichheiten von Bogenverhältnissen. Ob Menelaos sie thatsächlich *ähnlich* wie Maurolycus verwandt hat, das muſs lediglich Vermutung bleiben, so lange die Belege fehlen.





Curriculum vitae.

Ich, Axel Anthon Björnbo, bin geboren zu Kopenhagen am 20. April 1874 als Sohn des im Sommer 1876 durch Unglücksfall verstorbenen Dr. phil. Christian Axel Richard Christensen (Lehrer am Kopenhagener Gymnasium „Borgerdydskolen“ und Privatdozent der dortigen Universität) und der noch als Künstlerin thätigen Anthonore Christensen geb. Tscherning. 5 Jahre alt bekam ich in der die längste Zeit meiner Schuljahre von Herrn Prof. J. L. Heiberg geleiteten „Borgerdydskole“ einen Freiplatz, hatte denselben 12 Jahre inne und ging, 17 Jahre alt, vom Gymnasium ab mit Note 1. Nachdem ich die philosophische Prüfung der Universität mit „Auszeichnung“ bestanden hatte, wurde ich Lehrer an der genannten Schule, und zwar in der Mathematik und im Rechnen, und war daselbst mehrere Jahre thätig, indem ich doch daneben meine Universitätsstudien fortsetzte und den Vorlesungen der Herren Prof. H. G. Zeuthen, Jul. Petersen, N. T. Thiele, C. Christiansen, Jul. Thomsen, S. M. Jörgensen und K. Prytz beiwohnte. Nach erledigtem Militärdienst ging ich im Herbst 1899 nach München, um meine Studien fortzusetzen, hauptsächlich jedoch, um unter Herrn Prof. A. v. Braunmühl meine Kenntnisse in der Geschichte der Mathematik zu erweitern, zu welchem Spezialstudium ich schon zu meiner Gymnasialzeit durch Herrn Prof. J. L. Heiberg angeregt worden war. Übrigens hörte ich in München Vorlesungen bei den Herren Prof. Lindemann, Bauer, Seeliger, Pringsheim, Röntgen, Ebert, Krumbacher und Traube.

Am 30. Juli 1900 heiratete ich Anina Elsine Henriette Schübeler aus Kopenhagen, und am 21. Mai 1901 nahm ich laut kgl. Genehmigung den Familiennamen Björnbo, statt Christensen, an.